

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{2^n}{n^{10}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ läßt sich sowohl mit dem Wurzelkriterium über

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{10}}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^{10}}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^{10}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1$$

als auch mit dem Quotientenkriterium über

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1} \cdot n^{10}}{(n+1)^{10} \cdot 2^n} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1$$

untersuchen; beide Kriterien liefern sofort deren Divergenz.

Des weiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{3n^2 + 1}{n^4 + 1} \right| = \frac{3n^2 + 1}{n^4 + 1} \leq \frac{3n^2 + 1}{n^4} \leq \frac{4n^2}{n^4} = \frac{4}{n^2};$$

da mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ konvergiert, besitzt damit

die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 1}{n^4 + 1}$ in der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ eine konvergente Majorante und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

- b) Sei $(a_n)_{n \geq 2}$ die Folge mit

$$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)} > 0$$

für alle $n \geq 2$. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - 1)} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n+1} - 1}}_{\leq 1} \leq 1$$

also $a_{n+1} \leq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n \geq 2}$ monoton fallend. Ferner erhält man

$$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1 - 0} = 0;$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n \geq 2}$ eine Nullfolge. Folglich ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

konvergent.

Des weiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 44n + 55}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 44n^2 + 55n^2}} = \frac{1}{\sqrt{100n^2}} = \frac{1}{10n}.$$

Mit der harmonischen Reihe ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n}$ divergent; damit

besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 44n + 55}}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

26. Wir betrachten zunächst die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}} = \frac{\sqrt[n]{3^{n^2}}}{\sqrt[n]{2^{n^3}}} = \frac{3^n}{2^{n^2}} = \underbrace{\left(\frac{3}{2^n}\right)^n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

Wir betrachten nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-2)^n}{\sqrt{n^2 + n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n}}{(-2)^n} \right| = \\ &= \left| (-2) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}} \right| = 2 \cdot \sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2 + 3n + 2}} = \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + 0}{1 + 0 + 0}} = 2 > 1 \end{aligned}$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergent.

27. Zum einen ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{n^n}{(1+n)^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; wegen

$$a_n = \frac{n^n}{(1+n)^n} = \frac{n^n}{\left(n \left(\frac{1}{n} + 1\right)\right)^n} = \frac{n^n}{n^n \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$$

ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge, mithin ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Zum anderen ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{n^{(n^2)}}{(1+n)^{(n^2)}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; wegen

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{n^{(n^2)}}{(1+n)^{(n^2)}} \right|} = \frac{\sqrt[n]{n^{(n^2)}}}{\sqrt[n]{(1+n)^{(n^2)}}} = \frac{n^n}{(1+n)^n} = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

28. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} &= \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

sowie wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{1 - 0} = 1 + \sqrt{1} = 2,$$

insgesamt also

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \geq \frac{\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ die (wie harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$) divergente Minorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} &= \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \\ &= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + 0} = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$ die konvergente Majorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.