Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

21. a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wegen $(-1)^n\, x^{2n} = (-x^2)^n$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ handelt es sich bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ um die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = -x^2$; diese konvergiert aber genau für $|q| < 1$. Wegen

$$|q| < 1 \iff |-x^2| < 1 \iff |x|^2 < 1 \iff |x| < 1$$

konvergiert also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

22. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die n–te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist damit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2},$$

also die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2};$$

diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$\begin{aligned} |q| < 1 &\iff \left|\frac{3x}{x^2+2}\right| < 1 \iff \frac{3|x|}{x^2+2} < 1 \underset{x^2+2>0}{\iff} \\ &\iff 3|x| < x^2+2 \iff 0 < |x|^2 - 3|x| + 2 \iff \\ &\iff 0 < (|x|-1)\,(|x|-2) \iff \big(|x| < 1 \;\text{ oder }\; |x| > 2\big) \end{aligned}$$

also genau für

$$x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]-1, 1[\, \cup \,]2, \infty[\,,$$

und in diesem Fall gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3x}{x^2+2}} = \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

23. a) Wir betrachten zuerst die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$$

mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}-n} = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} - 1 = \\ &= \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} - 1 = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+0}-1 = 0; \end{aligned}$$

  damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n+1$, wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, zusammen also $n+\sqrt{n} \leq (n+1)+\sqrt{n+1}$, erneut wegen der Monotonie der Quadratwurzel also $\sqrt{n+\sqrt{n}} \leq \sqrt{n+1+\sqrt{n+1}}$, und demnach insgesamt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+1}} = a_{n+1};$$

  damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

Insgesamt ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, und daher konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ nach dem Leibnizkriterium. Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$$

mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)} = \\
&= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}-n} = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1 = \\
&= \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1 = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+0}+1 = 2
\end{aligned}$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und daher divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

b) Wir betrachten zuerst die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

sowie die (dazu) verdichtete Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\, a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m\sqrt{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m.$$

Die verdichtete Reihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty} 2^m\, a_{2^m}$ hat die Gestalt der geometrischen Reihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty} q^m$ mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$; wegen $|q| < 1$ konvergiert die verdichtete Reihe und damit nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

sowie die (dazu) verdichtete Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\, a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m\sqrt[2^m]{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2^m]{2^m}}.$$

Wegen

$$\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{gilt insbesondere} \qquad \frac{1}{\sqrt[2^m]{2^m}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1,$$

so daß die verdichtete Reihe damit nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ divergiert.

24. Für die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen werden die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

betrachtet; es bezeichne $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ bzw. $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ die n–te Partialsumme. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei wegen

$$0 < a_n < 1 + a_n \qquad \text{dann} \qquad 0 < b_n = \frac{a_n}{1+a_n} < 1$$

mit

$$b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \iff (1+a_n)\,b_n = a_n \iff b_n + a_n b_n = a_n \iff$$
$$\iff b_n = a_n - a_n b_n \iff b_n = a_n\,(1-b_n) \iff a_n = \frac{b_n}{1-b_n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Glieder eine Nullfolge; damit ergibt sich aber auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1-b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

Folglich gibt es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_0$ dann

$$|a_n - 0| < \varepsilon, \qquad \text{also} \qquad -1 < a_n < 1 \quad \text{und damit} \quad 0 < 1 + a_n < 2$$

gilt, und wegen

$$a_n = \underbrace{(1+a_n)}_{<2} \cdot \underbrace{\frac{a_n}{1+a_n}}_{>0} < 2 \cdot \frac{a_n}{1+a_n} = 2\,b_n$$

ergibt sich

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \le s_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} 2\,b_k = s_{n_0} + 2 \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \underset{b_k>0}{\le} s_{n_0} + 2\,t_n.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, es gibt also ein $K \in \mathbb{R}$ mit $t_n \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit gilt

$$s_n \le s_{n_0} + 2\,t_n \le s_{n_0} + 2\,K$$

für alle $n > n_0$, so daß die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls nach oben beschränkt ist und folglich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nichtnegativer Glieder nach Satz 3.6 1) schon konvergiert.