MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 5
18.11.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

17. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{n + (-1)^n \cdot (3\,n+1)}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-4\,k+1}{2\,k-1} = \dfrac{-4+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}, & \text{falls } n = 2\,k-1 \text{ ungerade,} \\ \dfrac{8\,k+1}{2\,k} = \dfrac{8+\frac{1}{k}}{2}, & \text{falls } n = 2\,k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = -2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 4$, so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte $b_1 = -2$ und $b_2 = 4$ besitzt.

Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{8\,k\,\pi}{4}\right) = \cos(2\,k\,\pi) = 1, & \text{falls } n = 8\,k, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-1)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-1, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-2)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0, & \text{falls } n = 8\,k-2, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-3)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-3, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-4)\,\pi}{4}\right) = \cos(2\,k\,\pi - \pi) = -1, & \text{falls } n = 8\,k-4, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-5)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-5, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-6)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 0, & \text{falls } n = 8\,k-6, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-7)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-7. \end{cases}$$

Die Folge $\left(\cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt die Häufungspunkte -1, 0 und 1 für die geraden $n \in \mathbb{N}$ bzw. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}$ für die ungeraden $n \in \mathbb{N}$; damit besitzt die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte 0, 1 und 2 für die geraden $n \in \mathbb{N}$ bzw. $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ für die ungeraden $n \in \mathbb{N}$, insgesamt also die Häufungspunkte

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad c_5 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da durch die Betrachtung der Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_{8k})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (b_{8k-7})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfaßt werden, gibt es somit genau die oben bestimmten (und keine weiteren) Häufungspunkte.

18. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen gebe es eine Konstante $q \in [0,1[$ mit der Eigenschaft $|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Wir zeigen $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion:

- Für „$n = 0$" ist $|a_{0+1} - a_0| = |a_1 - a_0| \leq q^0 \cdot |a_1 - a_0|$.
- Für „$n \to n+1$" folgt aus $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$ schon

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q \cdot |a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot (q^n \cdot |a_1 - a_0|) = q^{n+1} \cdot |a_1 - a_0|\,.$$

b) Wir zeigen $|a_{n+k} - a_n| \leq q^n \cdot \dfrac{|a_1 - a_0|}{1-q}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Es ist

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= |(a_{n+k} - a_{n+k-1}) + (a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\underset{(*)}{\leq} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} |a_{n+\ell+1} - a_{n+\ell}| \underset{(**)}{\leq} \sum_{\ell=0}^{k-1} q^{n+\ell} \cdot |a_1 - a_0| \\
&\leq q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} q^\ell \underset{(***)}{=} q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \\
&\leq q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \frac{1}{1-q} = q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q}.
\end{aligned}$$

Dabei geht bei $(*)$ die Dreiecksungleichung, bei $(**)$ Teilaufgabe a) und bei $(***)$ die geometrische Summenformel ein.

c) Wegen $0 \leq q < 1$ gilt

$$q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{und damit} \qquad q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, und für alle $m,\, n \geq n_0$ mit $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich

$$|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| \underset{\text{b)}}{\leq} q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q} < \varepsilon,$$

so daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist.

19. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right) = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{2z}{n} + \frac{z^2}{n^2}\right)\right) =$$
$$= n \cdot \left(-\frac{2z}{n} - \frac{z^2}{n^2}\right) = -2z - \frac{z^2}{n};$$

damit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-2z - \frac{z^2}{n}\right) = -2z.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2} = \left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2} = \left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\right]^{2}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2};$$

mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n} = e^{z}$$

ergibt sich damit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\right]^{2}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2} =$$
$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\right]^{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2} = e^{2z}\cdot 1^{2} = e^{2z}.$$

c) Für $z = 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{0}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{1}{n}\cdot n = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Für $z \neq 0$ gilt $q = \left(1+\frac{z}{n}\right)^{2} \neq 1$ für alle $n \geq |z| > 0$, und mit der geometrischen Summenformel ergibt sich

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}q^{k} = \frac{1}{n}\cdot q\cdot\sum_{k=0}^{n-1}q^{k} = \frac{1}{n}\cdot q\cdot\frac{1-q^{n}}{1-q} =$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n}}{1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2}} = \frac{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2}}{n\cdot\left(1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2}\right)}.$$

Nach a) gilt für den Nenner

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2}\right) = -2z,$$

und nach b) ist im Zähler

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2} = e^{2z};$$

damit erhält man

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2k} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2}}{n\cdot\left(1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2}\right)} = \frac{1-e^{2z}}{-2z} = \frac{e^{2z}-1}{2z}.$$

20. a) Wir zeigen zunächst

$$\sum_{k=0}^{n}a_{k} = 4-\frac{n+3}{2^{n}}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit mit vollständiger Induktion:

„$n = 0$“: Es ist

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 = \frac{0+1}{2^0} = 1 = 4 - \frac{0+3}{2^0}.$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1} = \left(4 - \frac{n+3}{2^n}\right) + \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}} = \\ &= 4 - \left(\frac{2\,(n+3)}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right) = 4 - \frac{n+4}{2^{n+1}} = 4 - \frac{(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3\,n+5}{2^n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 0$“: Es ist

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k a_k = (-1)^0 a_0 = \frac{0+1}{2^0} = 1 = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^0 \cdot \frac{3 \cdot 0 + 5}{2^0}\right)$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\right) + (-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3\,n+5}{2^n}\right) + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3\,n+5}{2^n} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{9\,n+18}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (-6\,n - 10 + 9\,n + 18)\right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (3\,n+8)\right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3\,(n+1)+5}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

b) Wir verwenden, daß $(\frac{n}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wegen

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 4 - \frac{n+3}{2^n} = 4 - \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{2^n}}_{\to 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4$$

ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 4.$
Ferner ist wegen

$$\left|(-1)^n \cdot \frac{3\,n+5}{2^n}\right| = \frac{3\,n+5}{2^n} = \underbrace{3 \cdot \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to 0}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{2^n}}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{3\,n+5}{2^n}}_{\to 0}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{9}$$

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a_n = \frac{4}{9}.$$