MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 4
11.11.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I" — Lösungsvorschlag —

13. a) Wir zeigen zunächst $1 \leq a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 0$":

$$\text{Es ist } a_0 \in [1,3] \text{ und damit } 1 \leq a_0 \leq 3.$$

„$n \to n+1$":

$$1 \leq a_n \leq 3 \implies 1^2 \leq a_n^2 \leq 3^2 \implies \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\,a_n^2 \leq \frac{9}{4} \implies$$
$$\implies \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \implies 1 \leq a_{n+1} \leq 3$$

Damit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4}\right) - a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(a_n^2 + 3 - 4a_n\right) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(a_n^2 - 4a_n + 3\right) \underset{\text{Vieta}}{=} \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(a_n - 1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0} \leq 0,$$

also $a_{n+1} \leq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

b) Gemäß a) ist die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jeden Startwert $a_0 \in [1,3]$ monoton fallend und (durch 1) nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\,a^2 + \frac{3}{4},$$

woraus sich

$$0 = a^2 - 4\,a + 3 \underset{\text{Vieta}}{=} (a-1)\,(a-3)$$

und damit $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [1,3]$:

- Für $a_0 \in [1, 3[$ gilt im Hinblick auf das in a) ermittelte Monotonieverhalten der Folge $a \leq a_0 < 3$ und damit $a = 1$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit $a = 3$.

14. Seien die reellen Zahlen α, $\beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Wir zeigen für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die explizite Darstellung ihrer Folgenglieder

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mit vollständiger Induktion:

- „$n = 1$“: Es ist

$$a_1 = a_{0+1} = \alpha \cdot a_0 + \beta = \alpha \cdot a_0 + \beta \cdot \alpha^0 = \alpha^1 \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{1-1} \alpha^k.$$

- „$n \to n + 1$“: Es ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha \cdot a_n + \beta \\ &= \alpha \cdot \left(\alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \right) + \beta \\ &= \alpha \cdot \alpha^n \cdot a_0 + \alpha \cdot \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k + \beta \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \left(\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k + 1 \right) \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k + \alpha^0 \right) \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n} \alpha^k. \end{aligned}$$

b) Wir bestimmen nun die Werte von α, β und a_0, für welche die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und treffen dazu folgenden Fallunterscheidung für $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Fall 1: Für $\alpha = 1$ ist

$$a_n = 1^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = a_0 + n \cdot \beta$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $\beta = 0$ ist, und wir erhalten die konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für diese gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a_0$.

- Fall 2: Für $\alpha \neq 1$ ergibt sich mit der geometrischen Summenformel

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} =$$
$$= \alpha^n \cdot a_0 + \frac{\beta}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\alpha} \cdot \alpha^n = \alpha^n \cdot \left(a_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Ist zum einen der Startwert $a_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$, so erhalten wir die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\beta}{1-\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für diese gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Ist zum anderen der Startwert $a_0 \neq \frac{\beta}{1-\alpha}$, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert; dies ist aber genau für $|\alpha| < 1$ der Fall, und es gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

15. Es seien $0 < a_1 < b_1$ fest gewählt. Man betrachte die beiden über die Rekursion

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen zunächst, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist:

- Wir zeigen $0 < a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
  - „$n = 1$“: Es ist $0 < a_1 < b_1$ nach Voraussetzung und damit $0 < a_1 \leq b_1$.
  - „$n \to n+1$“: Wegen $0 < a_n \leq b_n$ gilt $0 < a_{n+1}$ und $0 < b_{n+1}$ sowie

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} =$$
$$= \frac{(a_n + b_n)^2 - 4 \cdot a_n \cdot b_n}{2 \cdot (a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2 \cdot (a_n + b_n)} \geq 0,$$

  also $b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0$ bzw. $b_{n+1} \geq a_{n+1}$, insgesamt also $0 < a_{n+1} \leq b_{n+1}$.

- Wegen $0 < a_n \leq b_n$ erhalten wir

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \geq 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{b_n + b_n} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{2 \cdot b_n} = a_n,$$

  also $a_{n+1} \geq a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der unteren Intervallgrenzen monoton wachsend.

- Wegen $0 < a_n \leq b_n$ erhalten wir

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = \frac{2 \cdot b_n}{2} = b_n,$$

  also $b_{n+1} \leq b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der oberen Intervallgrenzen monoton fallend.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und wegen $a_n \leq b_n \leq b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt, also konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und wegen $b_n \geq a_n \geq a_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach unten beschränkt, also konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Damit gilt aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = b$, und wir erhalten mit Hilfe der Rekursionsvorschrift von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a+b}{2},$$

also $2\,b = a + b$ und damit $b = a$; folglich ist wegen

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a = 0$$

die Folge $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Intervallängen eine Nullfolge.

Wir bestimmen nun das durch die Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ definierte Element $r \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$; dabei gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = r = b = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ insbesondere $r \geq 0$. Wir zeigen dazu $a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion: für „$n = 1$“ ist $a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot b_1$, und für „$n \to n+1$“ folgt aus $a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1$ schon

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1.$$

Damit ergibt sich

$$r^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a_1 \cdot b_1,$$

wegen $r \geq 0$ also $r = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$; es ist also $\sqrt{a_1 \cdot b_1} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

16. Für die gegebene durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = \tfrac{3}{2}, \quad a_4 = \tfrac{5}{3}, \quad a_5 = \tfrac{8}{5}, \quad a_6 = \tfrac{13}{8}, \ldots$$

Sie besitzt daher die Teilfolgen

$$(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_3, a_5, \ldots) = \left(1,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{8}{5},\ \ldots\right)$$

und

$$(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, \ldots) = \left(2,\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{13}{8},\ \ldots\right)$$

Wir zeigen zunächst $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“: Es ist $a_1 = 1$ und damit $1 \leq a_1 \leq 2$.

„$n \to n+1$“: Es ist $1 \leq a_n \leq 2$ und damit

$$1 \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2} \implies 2 \geq 1 + \frac{1}{a_n} \geq \frac{3}{2} \implies 2 \geq a_{n+1} \geq 1.$$

a) Wir zeigen $a_{2k-1} \leq a_{2k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$k = 1$“: Es ist

$$a_1 = 1 \leq \frac{3}{2} = a_3.$$

„$k \to k+1$“: Es ist

$$a_{2k-1} \leq a_{2k+1} \underset{a_{2k-1}>0}{\implies} \frac{1}{a_{2k-1}} \geq \frac{1}{a_{2k+1}} \implies$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}}_{=a_{2k}} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k+1}}}_{=a_{2k+2}} \implies a_{2k} \geq a_{2k+2} \underset{a_{2k+2}>0}{\implies} \frac{1}{a_{2k}} \leq \frac{1}{a_{2k+2}}$$

$$\implies \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k}}}_{=a_{2k+1}} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k+2}}}_{=a_{2k+3}} \implies a_{2k+1} \leq a_{2k+3}$$

Damit ist die zunächst Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt also $a_{2k-1} \leq a_{2k+1}$, woraus sich

$$\frac{1}{a_{2k-1}} \geq \frac{1}{a_{2k+1}} \quad \text{und damit} \quad a_{2k} = 1 + \frac{1}{a_{2k-1}} \geq 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = a_{2k+2}$$

ergibt; folglich ist dann die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

b) Die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist gemäß a) monoton wachsend und gemäß den einleitenden Bemerkungen (durch 1 nach unten und 2 nach oben) beschränkt, also konvergent, und besitzt daher einen Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1}$, für den ebenfalls $1 \leq a \leq 2$ gilt. Wegen

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}} = 1 + \frac{a_{2k-1}}{a_{2k-1}+1} = \frac{2\,a_{2k-1}+1}{a_{2k-1}+1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\,a_{2k-1}+1}{a_{2k-1}+1} = \frac{2\,a+1}{a+1}$$

und damit

$$a\,(a+1) = 2\,a+1, \qquad \text{also} \quad a^2 - a - 1 = 0,$$

woraus sich

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

wegen $1 \leq a \leq 2$ also

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ergibt. Des weiteren ist die Teilfolge gemäß a) $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergent, und mit denselben Überlegungen wie eben ergibt sich für den Grenzwert $b = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$ dann

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Damit konvergiert auch die gesamte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = b$.