MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 3
04.11.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

9. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2+1}} =$$
$$= \frac{\sqrt{n^2}^{\,2} - \sqrt{n^2+1}^{\,2}}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2 - (n^2+1)}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2+1}}$$

und damit

$$a_n = (3\,n+1)\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+1}\right) = -\frac{3\,n+1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2+1}} =$$
$$= -\frac{3 + \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2}}{n} + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = -\frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{3+0}{1+\sqrt{1+0}} = -\tfrac{3}{2}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n^2+2\,n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2\,n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2\,n} + n\right)}{\sqrt{n^2+2\,n} + n} =$$
$$= \frac{\sqrt{n^2+2\,n}^{\,2} - n^2}{\sqrt{n^2+2\,n} + n} = \frac{(n^2+2\,n) - n^2}{\sqrt{n^2+2\,n} + n} = \frac{2\,n}{\sqrt{n^2+2\,n} + n} =$$
$$= \frac{2}{\frac{\sqrt{n^2+2\,n}}{n} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

10. a) Wir zeigen $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$\text{Es ist } a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und damit} \quad 1 \leq a_1 \leq 5.$$

„$n \to n+1$“:

$$1 \leq a_n \leq 5 \implies$$
$$9 \geq 11 - 2\,a_n \geq 1 \implies 3 \geq \sqrt{11 - 2\,a_n} \geq 1 \implies$$
$$2 \leq 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \leq 4 \implies 1 \leq a_{n+1} \leq 5.$$

b) Wir zeigen $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$a_1 = \frac{7}{2} \geq 3 = 5 - \sqrt{11 - 2 \cdot \frac{7}{2}} = a_2.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} &a_n \geq a_{n+1} \implies \\ &\quad 11 - 2\,a_n \leq 11 - 2\,a_{n+1} \implies \sqrt{11 - 2\,a_n} \leq \sqrt{11 - 2\,a_{n+1}} \implies \\ &\qquad a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \geq 5 - \sqrt{11 - 2\,a_{n+1}} = a_{n+2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $1 \leq a \leq 5$ gemäß a), und wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel erhält man

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(5 - \sqrt{11 - 2\,a_n}\right) &= \\ = 5 - \sqrt{11 - 2 \lim_{n\to\infty} a_n} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &a - 5 = -\sqrt{11 - 2\,a} \implies (a-5)^2 = \left(-\sqrt{11 - 2\,a}\right)^2 \implies \\ &\quad a^2 - 10\,a + 25 = 11 - 2\,a \implies a^2 - 8\,a + 14 = 0 \implies \\ &\qquad a = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}; \end{aligned}$$

wegen $1 \leq a \leq 5$ folgt hieraus schon

$$a = 4 - \sqrt{2}.$$

11. a) Wir zeigen $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$a_1 = 1 > \frac{1}{2}.$$

„$n \to n+1$“: Wegen $a_n > \frac{1}{2}$ ist $a_n - \frac{1}{2} > 0$ sowie $a_n > 0$ und $2 + a_n > 0$, woraus sich

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} - \frac{1}{2} = \frac{2\,(1 + a_n^2) - (2 + a_n)}{2\,(2 + a_n)} = \frac{2 + 2\,a_n^2 - 2 - a_n}{2\,(2 + a_n)} &= \\ = \frac{2\,a_n^2 - a_n}{2\,(2 + a_n)} = \frac{2\,a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2\,(2 + a_n)} = \frac{a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2 + a_n} > 0 \end{aligned}$$

und damit $a_{n+1} > \frac{1}{2}$ ergibt.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > \frac{1}{2}$ gemäß a) und damit $2\,a_n > 1$, also $1 - 2\,a_n < 0$, sowie $2 + a_n > 0$, woraus sich

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} - a_n = \frac{(1 + a_n^2) - a_n\,(2 + a_n)}{2 + a_n} = $$
$$= \frac{1 + a_n^2 - 2\,a_n - a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 - 2\,a_n}{2 + a_n} < 0$$

und damit $a_{n+1} < a_n$ ergibt; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Da sie zudem gemäß a) nach unten (durch $\frac{1}{2}$) beschränkt ist, ergibt sich daraus schon ihre Konvergenz. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 + a^2}{2 + a},$$

woraus sich

$$a\,(2 + a) = 1 + a^2, \qquad \text{also} \qquad 2\,a + a^2 = 1 + a^2,$$

und damit

$$2\,a = 1, \qquad \text{also} \qquad a = \frac{1}{2}$$

ergibt.

12. a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; damit konvergiert auch die (lediglich um einen Index verschobene) Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Folglich ist zunächst $(a_n + a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ als Summe konvergenter Folgen konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a + a = 2\,a$$

und schließlich $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als Vielfaches einer konvergenten Folge konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot (2\,a) = a.$$

Alternativ läßt sich auch direkt mit Hilfe der Definition argumentieren: da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$; damit folgt

$$|b_n - a| = \left|\frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) - a\right| = \frac{1}{2} \cdot |(a_n + a_{n+1}) - 2\,a| =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |(a_n - a) + (a_{n+1} - a)| \leq \frac{1}{2} \cdot \big(\underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<\varepsilon}\big) < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, und damit konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach Beispiele 1.10 3) nicht konvergent. Die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch wegen

$$b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}\,\big((-1)^n + (-1)^{n+1}\big) = \frac{(-1)^n}{2}\,(1 + (-1)) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ die konstante Nullfolge und damit insbesondere konvergent.

c) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent, insbesondere (nach oben) beschränkt, es gibt also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $b_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton wachsend ist, gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und folglich

$$M \geq b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,(a_n + a_n) = a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, demnach als monoton wachsende Folge bereits konvergent.