MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 2
28.10.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

5. Hinsichtlich der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $|x| < 1$ ist
$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$
- Für $|x| > 1$ können wir
$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty \qquad \text{ist} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
und damit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$
- Für $|x| = 1$ ist wegen $x \neq -1$ nur $x = 1$ zu betrachten; wegen $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine Nullfolge.

Hinsichtlich der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_n = \frac{y^n}{1+y^{2n}}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $|y| < 1$ ist
$$\lim_{n\to\infty} y^n = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} y^{2n} = \lim_{n\to\infty} (y^n)^2 = 0^2 = 0;$$
folglich ergibt sich
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

- Für $|y| > 1$ ist $y \neq 0$, und wir können

$$b_n = \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{\frac{1}{y^n}}{\frac{1}{y^{2n}}+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

$$\lim_{n\to\infty} |y^n| = \lim_{n\to\infty} |y|^n = \infty$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y^n} = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y^n}\right)^2 = 0^2 = 0,$$

woraus sich

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{y^n}}{\frac{1}{y^{2n}}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

ergibt.

- Für $|y| = 1$ ist $y = 1$ oder $y = -1$:
  - Für $y = 1$ ist $b_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $\frac{1}{2}$.
  - Für $y = -1$ ist $b_n = (-1)^n \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die alternierende Folge $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, die jedoch divergiert.

6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besteht das Folgenglied a_n aus genau sieben Summanden, und wir erhalten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+6)^2 + (n+7)^2}{n^2} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{(n+2)^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n+6)^2}{n^2} + \frac{(n+7)^2}{n^2} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n+6}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+7}{n}\right)^2 = \\ &= \big(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\big)^2 + \big(1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\big)^2 + \ldots + \big(1 + \underbrace{\frac{6}{n}}_{\to 0}\big)^2 + \big(1 + \underbrace{\frac{7}{n}}_{\to 0}\big)^2 \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{(1+0)^2 + (1+0)^2 + \ldots + (1+0)^2 + (1+0)^2}_{7 \text{ Summanden}} = 7. \end{aligned}$$

Dagegen besteht für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Folgenglied

$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{n^3}$$

aus genau n Summanden; die Anzahl der Summanden wird also für wachsendes n beliebig groß. Wir schreiben daher zunächst den Zähler des Folgenglieds b_n unter Verwendung der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gemäß

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2=\sum_{k=n+1}^{2n}k^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2n\,(2n+1)\,(4n+1)}{6}-\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n\,(2n+1)}{6}\cdot\big[2(4n+1)-(n+1)\big]=\frac{n\,(2n+1)\,(7n+1)}{6}$$

ohne Summenzeichen und erhalten damit

$$b_n=\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2}{n^3}=$$

$$=\frac{n\,(2n+1)\,(7n+1)}{6n^3}=\frac{n}{6n}\cdot\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{7n+1}{n}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\underbrace{\Bigg(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Bigg)}_{\to 2}\cdot\underbrace{\Bigg(7+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Bigg)}_{\to 7}\;\xrightarrow[n\to\infty]{}\;\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 7=\frac{7}{3}.$$

7. a) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$a_n=\frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1}=\frac{1-\frac{3}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}};$$

wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)=1\qquad\text{und}\qquad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1.$$

Mit $n_0=400^2$ gilt dann für alle $n\geq n_0$

$$|a_n-a|=\left|\frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1}-1\right|=\left|\frac{(\sqrt{n}-3)-(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1}\right|=\left|\frac{-4}{\sqrt{n}+1}\right|=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{n}+1}\leq\frac{4}{\sqrt{n}}\leq\frac{4}{\sqrt{n_0}}=\frac{4}{\sqrt{400^2}}=\frac{4}{400}=\frac{1}{100}=0{,}01.$$

b) Wir weisen anhand der Definition nach, daß die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n=\frac{\sin^3 n-3\,\cos n}{\sqrt{n}}\qquad\text{für alle}\quad n\in\mathbb{N}$$

den Grenzwert $a = 0$ besitzt; sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{\sin^3 n - 3\,\cos n}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{\left|\sin^3 n - 3\,\cos n\right|}{\sqrt{n}} \leq$$
$$\leq \frac{\left|\sin^3 n\right| + |3\,\cos n|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin n|^3 + 3 \cdot |\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1^3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}}$$

mit

$$\frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2 < n.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl n_0 mit $n_0 > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$, so daß wir für alle $n \geq n_0$ wegen $n > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$ damit

$$|a_n - a| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

erhalten.

8. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wir zeigen, daß die beiden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

$$c_n = \min\{a_n, b_n\} \qquad \text{und} \qquad d_n = \max\{a_n, b_n\}.$$

konvergieren, indem wir nachweisen, daß

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \min\{a, b\} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = \max\{a, b\}$$

gilt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es

- wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$,
- wegen $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$;

es sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}_0$. Wir treffen nun folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: Sei $a = b$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ \text{ und } \ a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

und folglich auch

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \ \text{ und } \ a - \varepsilon < d_n < a + \varepsilon;$$

somit gilt nach Definition

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a = \min\{a, b\} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = a = \max\{a, b\}.$$

- Fall 2: Sei $a < b$. Speziell zu $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ dann

  $$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

  Damit folgt $c_n = a_n$ und $d_n = b_n$ alle $n \geq n_0$, und wir erhalten

  $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \min\{a, b\}$$

  und

  $$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \max\{a, b\}.$$

- Fall 2: Sei $a > b$. Speziell zu $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ dann

  $$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

  Damit folgt $c_n = b_n$ und $d_n = a_n$ alle $n \geq n_0$, und wir erhalten

  $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \min\{a, b\}$$

  und

  $$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \max\{a, b\}.$$