

## Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir untersuchen die drei gegebenen Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf Monotonie und Beschränktheit.

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1) - 1}{(n+1) + 1} - \frac{n - 1}{n + 1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \\ &= \frac{n \cdot (n+1) - (n-1) \cdot (n+2)}{(n+2) \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{(n^2 + n) - (n^2 + n - 2)}{(n+2) \cdot (n+1)} = \frac{2}{(n+2) \cdot (n+1)} > 0, \end{aligned}$$

also  $a_{n+1} > a_n$ , und damit ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend; wegen

$$0 \leq \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zudem beschränkt.

- Wir bestimmen zunächst die ersten vier Folgenglieder der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; es ist  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = \frac{1}{5}$ ,  $b_3 = \frac{1}{5}$  und  $b_4 = \frac{3}{17}$ . Wegen  $b_2 = b_3 > b_1$  und  $b_2 = b_3 > b_4$  ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht monoton; wegen

$$0 \leq \frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt.

- Mit der Gaußformel für die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen gilt

$$c_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)+1}{2 \cdot (n+1)}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{\frac{n+2}{2 \cdot (n+1)}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{(n+2) \cdot 2n}{2 \cdot (n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} < 1,$$

wegen  $c_n > 0$  also  $c_{n+1} < c_n$ , und damit ist die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton fallend; wegen

$$0 \leq \frac{n+1}{2n} \leq \frac{n+n}{2n} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zudem beschränkt.

b) Wir zeigen nun die Konvergenz der drei gegebenen Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  anhand der Definition.

- Wir zeigen, daß die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  den Grenzwert  $a = 1$  besitzt. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ , und für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- Wir zeigen, daß die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  den Grenzwert  $b = 0$  besitzt. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , und für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  gilt

$$|b_n - b| = \left| \frac{n-1}{n^2+1} - 0 \right| = \frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

- Wir zeigen, daß die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  den Grenzwert  $c = \frac{1}{2}$  besitzt. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , und für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  gilt

$$|c_n - c| = \left| \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

2. a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{n^n} = \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}_{>1} > 1, \end{aligned}$$

wegen  $a_n > 0$  also  $a_{n+1} > a_n$ ; folglich ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend, insbesondere also durch  $a_1 = 1$  nach unten beschränkt. Wegen

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n} = \\ &= \underbrace{\frac{n}{1}}_{=n} \cdot \underbrace{\frac{n}{2}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{3}}_{\geq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n}{n-2}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \geq n \end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aber nicht nach oben beschränkt: für jedes  $K \in \mathbb{R}^+$  gibt es nämlich (nach dem Archimedischen Axiom) ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > K$ , und es ergibt sich  $a_n \geq n > K$ . Da nun die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht beschränkt ist, kann sie auch nicht konvergieren, besitzt also keinen Grenzwert.

b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$b_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{a_n},$$

so daß sich zunächst wegen  $a_{n+1} > a_n > 0$  gemäß a)

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} = b_n$$

ergibt; folglich ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton fallend. Des weiteren existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , und für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$|b_n - 0| = |b_n| = b_n = \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon;$$

damit konvergiert die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den Grenzwert  $b = 0$  und ist als konvergente Folge insbesondere beschränkt.

3. a) Wir zeigen

$$a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  mit Hilfe vollständiger Induktion:

- „ $n = 2$ “: Es ist

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = 1 - \frac{2}{2(2+1)} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{2}\right)$$

- „ $n \rightarrow n+1$ “: Es ist

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) &= \left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2(n+1)(n+2) - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2n^2 + 6n + 4 - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2n^2 + 4n}{n(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right). \end{aligned}$$

- b) Wir zeigen anhand der Definition, daß die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  den Grenzwert  $a = \frac{1}{3}$  besitzt. Zunächst gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{1}{3} + \frac{2}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{3n} \leq \frac{1}{n}.$$

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es nun ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , und für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon;$$

damit konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a = \frac{1}{3}$ . Für  $\varepsilon = \frac{1}{1000}$  kann wegen

$$\frac{1}{n_0} < \frac{1}{1000} \quad \text{bzw.} \quad n_0 > 1000$$

etwa  $n_0 = 1001$  gewählt werden.

4. a) Die erste Aussage ist wahr: sind die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend, so gilt

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{und} \quad b_n \leq b_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

woraus mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt; damit ist auch die Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend.

- b) Die zweite Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel wählen wir die beiden monoton wachsenden Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = n^2$  und  $b_n = -\frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \cdot b_n = -n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dagegen nicht monoton wachsend.
- c) Die dritte Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel wählen wir die beiden nicht beschränkten Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = n$  und  $b_n = -n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; die Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n + b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dagegen beschränkt.
- d) Die vierte Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel wählen wir die beiden nicht beschränkten Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n = \begin{cases} 0, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n, & \text{für } n \text{ ungerade;} \end{cases}$$

die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \cdot b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dagegen beschränkt.