MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Klausur
01.04.2014

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir betrachten die Folge reeller Zahlen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{2\,\sin n}{n^2+1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es ist $-1 \leq \sin n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{2\,\sin n}^{-2\leq 2\,\sin n\leq 2}}{\underbrace{n^2+1}_{\to\infty}} = 0.$$

Wir weisen nun anhand der Definition nach, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = 0$ besitzt. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$, und für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{2\,\sin n}{n^2+1} - 0\right| = \left|\frac{2\,\sin n}{n^2+1}\right| = \frac{2\,|\sin n|}{n^2+1} \underset{|\sin n|\leq 1}{\leq}$$
$$\leq \frac{2}{n^2+1} < \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Mit $n_0 = 2000$ gilt dann

$$|a_n - a| < \frac{2}{n_0} = \frac{2}{2000} = 10^{-3}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{(n^2+n) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{2\,n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1. \end{aligned}$$

c) Wir formulieren das Schrankenlemma: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ sowie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \le c_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $a = b$, so konvergiert auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a = b$.

Wir betrachten die Folge

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Unter Verwendung der Monotonie der n–ten Wurzel gilt

$$\begin{aligned} c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} \quad &\ge \quad \sqrt[n]{0 + 5^n} = \sqrt[n]{5^n} = 5 = a_n \\ c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} \quad &\le \quad \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5 = b_n \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und wegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 5 = 5 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \cdot 5 = 5.$$

erhalten wir nach dem Schrankenlemma

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5.$$

2. a) Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}}.$$

Es ist

$$(-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}} = (-2)^n \cdot \frac{5}{3^n \cdot 3} = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Die gegebene Reihe besitzt also die Gestalt der geometrischen Reihe $c \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mit den Konstanten $c = \frac{5}{3}$ und $q = -\frac{2}{3}$; wegen $|q| < 1$ ist sie konvergent und besitzt den Grenzwert $c \cdot \dfrac{1}{1-q}$, wir erhalten demnach

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1.$$

b) Wir formulieren das Leibnizsche Konvergenzkriterium sowie das Cauchysche Verdichtungskriterium:

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere ist dann also $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$). Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.
- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen $a_n \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die verdichtete Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ konvergiert.

Wir untersuchen nun die gegebene Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$, also

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2,$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

- Die Folgen $(n)_{n\geq 2}$ und $(\ln n)_{n\geq 2}$ sind monoton wachsend, und wegen $n > 0$ und $\ln n > 0$ für alle $n \geq 2$ ist auch die Folge $(n \cdot \ln n)_{n\geq 2}$ positiver reeller Zahlen monoton wachsend, so daß $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\ln n}_{\to\infty}} = 0$$

  ist $(a_n)_{n\geq 2}$ zudem eine Nullfolge; damit konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium.
- Die gegebene (alternierende) Reihe ist genau dann absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n \cdot a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \underset{a_n>0}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

  konvergiert; dabei ist $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Die dazu verdichtete Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{2^m \cdot \ln 2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$$

  ist wie die harmonische Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ divergent, so daß die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium ebenfalls divergiert.

Zusammenfassend ist die gegebene Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$$

(nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium) konvergent, aber (nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium) nicht absolut konvergent.

3. a) Wir formulieren den Satz von Weierstraß. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Definitionsintervall $D_f = [a, b]$ gilt:

   - f ist beschränkt, d.h. gibt es ein $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.
   - f nimmt Maximum und Minimum an, d.h. es gibt Punkte p, $q \in [a, b]$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in [a, b]$.
   - Für den Wertebereich W_f von f gilt $W_f = [f(p), f(q)]$.

   b) Die gegebene Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x,$$

ist als Produkt der stetigen Funktionen arcsin und arccos selbst stetig, und das Definitionsgebiet $D_f = [-1, 1]$ ist ein abgeschlossenes Intervall. Damit gibt es nach dem Satz von Weierstraß ein globales Minimum p und ein globales Maximum q, und für den Wertebereich von f gilt $W_f = [f(p), f(q)]$. Da arcsin und arccos auf $]-1, 1[$ differenzierbar sind, ist auch ihr Produkt f auf $]-1, 1[$ differenzierbar, und mit der Produktregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x + \arcsin x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (\arccos x - \arcsin x) \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-1, 1\right[,$$

so daß es für ein lokales (und damit insbesondere auch für ein globales) Extremum a von f nur die beiden folgenden Möglichkeiten gibt:

- a ist ein Randpunkt von $D_f = [-1, 1]$, also $a \in \{-1, 1\}$.
- a ist im Innern von D_f mit $f'(a) = 0$; wegen

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (\arccos x - \arcsin x) = 0 \iff$$
$$\iff \arccos x - \arcsin x = 0 \iff \arccos x = \arcsin x \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

  für alle $x \in \left]-1, 1\right[$ ist also $a \in \{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

a	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$f(a)$	$-\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{\pi^2}{16}$	0

erhalten wir $p = -1$ und $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und damit $W_f = \left[-\frac{\pi^2}{2}, \frac{\pi^2}{16}\right]$.

c) Wir betrachten eine stetige Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) > 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1,1]\,.$$

Die Funktion g ist nach Voraussetzung stetig, und das Definitionsgebiet $D_g = [-1,1]$ ist ein abgeschlossenes Intervall. Damit besitzt g nach dem Satz von Weierstraß ein globales Minimum $p \in [-1,1]$ und ein globales Maximum $q \in [-1,1]$, und es gilt $g(p) \leq g(x) \leq g(q)$ für alle $x \in [-1,1]$. Es ist $p \in [-1,1]$ und damit nach Voraussetzung $g(p) > 0$; wir wählen $\varepsilon = g(p) > 0$ und erhalten damit

$$g(x) \geq g(p) = \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1,1]\,.$$

4. Wir betrachten die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right).$$

a) Der maximale Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ von f umfaßt genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche das Argument $e^{\frac{1}{2}x} - 1$ des natürlichen Logarithmus ln positiv ist. Mit der Monotonieeigenschaft des natürlichen Logarithmus gilt

$$e^{\frac{1}{2}x} - 1 > 0 \iff e^{\frac{1}{2}x} > 1 \iff \frac{1}{2}\,x > 0 \iff x > 0,$$

und damit ist $D_f = \mathbb{R}^+$. Für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1 < x_2$ gilt ferner

$$x_1 < x_2 \underset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}\,x_1 < \frac{1}{2}\,x_2 \underset{(**)}{\Longrightarrow} e^{\frac{1}{2}x_1} < e^{\frac{1}{2}x_2} \underset{(***)}{\Longrightarrow} e^{\frac{1}{2}x_1} - 1 < e^{\frac{1}{2}x_2} - 1$$
$$\underset{(****)}{\Longrightarrow} \ln\left(e^{\frac{1}{2}x_1} - 1\right) < \ln\left(e^{\frac{1}{2}x_2} - 1\right) \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

dabei geht bei $(*)$ das Monotoniegesetz der Multiplikation, bei $(**)$ die Monotonieeigenschaft der Exponentialfunktion, bei $(***)$ das Monotoniegesetz der Addition und bei $(****)$ die Monotonieeigenschaft des natürlichen Logarithmus ein. Damit ist f streng monoton wachsend, insbesondere also umkehrbar.

b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right)$$

ist als Summe und Komposition stetiger Funktionen selbst stetig; ferner ergibt sich mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion und dem Grenzverhalten des natürlichen Logarithmus

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \ln\Big(\overbrace{\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\to\, e^0 = 1+} - 1}^{\to\, 0+}\Big) = -\infty$$

und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \ln\Big(\overbrace{\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\to\, +\infty} - 1}^{\to +\infty}\Big) = +\infty.$$

Zum Nachweis von $W_f = \mathbb{R}$ sei $y \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

gibt es ein $a \in \,]0,1[$ mit $f(a) < y$ sowie ein $b \in \,]1,\infty[$ mit $f(b) > y$; wegen der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = y$, und folglich ist $y \in W_f$. Wir bestimmen die Umkehrfunktion f^{-1} von f; seien dazu $y \in W_f = \mathbb{R}$ und $x \in D_f = \mathbb{R}^+$. Wegen

$$y = f(x) \iff y = \ln\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right) \iff e^y = e^{\frac{1}{2}x} - 1 \iff$$
$$\iff e^y + 1 = e^{\frac{1}{2}x} \iff \ln\left(e^y + 1\right) = \frac{1}{2}\,x \iff 2\,\ln\left(e^y + 1\right) = x$$

ist $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = 2\,\ln\left(e^x + 1\right)$.

c) Die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten besitzt die Steigung $m = 1$, so daß auch die dazu parallele Tangente an den Graphen G_f von f die Steigung $m = 1$ besitzt; da diese Steigung der 1. Ableitung von f an der gesuchten Stelle $x \in D_f$ entspricht, suchen wir genau den Punkt $x \in D_f$ mit $f'(x) = 1 = m$. Die Funktion f ist als Summe und Komposition differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, und mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = 1 \iff \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} \cdot \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x} = 1 \iff \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} - 1 \iff$$
$$\iff \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x} = 1 \iff e^{\frac{1}{2}x} = 2 \iff \frac{1}{2}\,x = \ln 2 \iff x = 2\,\ln 2.$$