MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Klausur
19.02.2014

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. a)
   - – Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $a_n \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
     – Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt monoton wachsend, wenn $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   - Die reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \ge n_0$ dann $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.
   - Für eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gilt:
     – Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Supremum der Folgenglieder $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
     – Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$.

   b) In Abhängigkeit von den Parametern $0 < s < t$ ist die durch $a_1 = s$ und $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + s\cdot t^2}{1+s}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben.
   - Wir zeigen $a_n \le t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:
     – Für „$n = 1$“ ist $a_1 = s$, wegen $s \le t$ also insbesondere $a_1 \le t$.
     – Für „$n \to n+1$“ ist $a_n \le t$, wegen $a_n \ge 0$ also $a_n^2 \le t^2$, und mit den Monotoniegesetzen von Addition und Multiplikation (es ist $1 + s > 0$) sowie der Monotonie der Quadratwurzel ergibt sich
     $$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + s\cdot t^2}{1+s}} \le \sqrt{\frac{t^2 + s\cdot t^2}{1+s}} = \sqrt{\frac{t^2\cdot(1+s)}{1+s}} = \sqrt{t^2} \underset{t>0}{=} t.$$

     Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch t nach oben beschränkt.
   - Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \le t$, wegen $a_n \ge 0$ also $a_n^2 \le t^2$, und mit den Monotoniegesetzen von Addition und Multiplikation (es ist $1 + s > 0$) sowie der Monotonie der Quadratwurzel ergibt sich
     $$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + s\cdot t^2}{1+s}} \ge \sqrt{\frac{a_n^2 + s\cdot a_n^2}{1+s}} = \sqrt{\frac{a_n^2\cdot(1+s)}{1+s}} = \sqrt{a_n^2} \underset{a_n\ge 0}{=} a_n$$
     und damit $a_{n+1} \ge a_n$. Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
   - Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent; es sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wegen $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a \ge 0$, und unter Verwendung der Rekursionsvorschrift erhält man
     $$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_n^2 + s\cdot t^2}{1+s}} \underset{\sqrt{\cdot}\ \text{stetig}}{=} \sqrt{\frac{a^2 + s\cdot t^2}{1+s}},$$

woraus sich zunächst

$$a^2 = \frac{a^2 + s \cdot t^2}{1+s}, \quad \text{also} \quad (1+s) \cdot a^2 = a^2 + s \cdot t^2 \quad \text{bzw.} \quad s \cdot a^2 = s \cdot t^2,$$

wegen $s \neq 0$ dann $a^2 = t^2$, und wegen $a \geq 0$ schließlich $a = t$ ergibt.

2. a)
- Für $p \leq 2$ gilt

$$\left| \frac{n^p}{n^4+1} \right| = \frac{n^p}{n^4+1} \underset{p \leq 2}{\leq} \frac{n^2}{n^4+1} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4+1}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

- Für $p \geq 3$ gilt

$$\frac{n^p}{n^4+1} \underset{p \geq 3}{\geq} \frac{n^3}{n^4+1} \geq \frac{n^3}{n^4+n^4} = \frac{n^3}{2\,n^4} = \frac{1}{2\,n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4+1}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n$ besitzt die Gestalt der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = 1 - \ln x$. Diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$|1 - \ln x| < 1 \iff -1 < 1 - \ln x < 1 \iff$$
$$\iff -2 < -\ln x < 0 \iff 0 < \ln x < 2 \iff 1 < x < e^2$$

also genau für $x \in \,]1, e^2[$, und in diesem Fall gilt für die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-\ln x)} = \frac{1}{\ln x}.$$

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(\cos x)^n}{n} \right|} = \sqrt[n]{\frac{|\cos x|^n}{n}} = \frac{|\cos x|}{\sqrt[n]{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{|\cos x|}{1} = |\cos x| \leq 1;$$

damit ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium für $|\cos x| < 1$, also für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (absolut) konvergent. Ferner gilt:

- Für $x = (2\,\ell + 1) \cdot \pi$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt $\cos x = -1$, und damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ als alternierende harmonische Reihe konvergent.

- Für $x = 2\,\ell \cdot \pi$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt $\cos x = 1$, und damit ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ als harmonische Reihe divergent.

Insgesamt ist die Reihe genau für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\,\ell \cdot \pi \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ konvergent.

3. a) Wir betrachten eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $a \in D$.
   - – Eine Funktion f heißt stetig im Punkt a, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ stets $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ gilt.
     – Eine Funktion f heißt differenzierbar im Punkt $a \in D$, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ für $x \to a$ (im eigentliche Sinne) existiert.
   - – Eine Funktion f heißt differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist.
     – Eine Funktion f heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

   b) Die gegebene Funktion

$$f : [0, 1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{\sin x}{\ln x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ nach der Produktregel und (für den zweiten Faktor) nach der Quotientenregel differenzierbar mit

$$f'(x) = 1 \cdot \frac{\sin x}{\ln x} + x \cdot \left(\frac{\cos x \cdot \ln x - \sin x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \right) = \frac{\sin x}{\ln x} + \frac{x \cdot \cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{(\ln x)^2}.$$

Für alle $x \neq 0$ gilt ferner

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{\sin x}{\ln x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}} = 0,$$

und damit ergibt sich insgesamt

$$f' : [0, 1[\to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\ln x} + \dfrac{x \cdot \cos x}{\ln x} - \dfrac{\sin x}{(\ln x)^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f' ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ als Summe von Quotienten stetiger Funktionen selbst stetig, und im Punkt 0 erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}} + \frac{\overbrace{x \cdot \cos x}^{\to 0}}{\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}} - \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{(\ln x)^2}_{\to \infty}} \right) = 0 + 0 - 0 = 0 = f'(0).$$

Damit ist f' in allen Punkten $x \in [0, 1[$ stetig, und damit ist f stetig differenzierbar.

c) Es ist $f(0) = 0$, und für alle $x \in \left]0,1\right[$ ist $x > 0$ sowie $\sin x > 0$ und $\ln x < 0$, insgesamt also $f(x) = x \cdot \dfrac{\sin x}{\ln x} < 0$; damit gilt $W_f \subseteq \left]-\infty,0\right]$. Für den Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in \left]-\infty,0\right]$; mit $a = 0$ gilt $f(a) = 0 \geq y$, und wegen

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(\underbrace{x}_{\to 1} \cdot \frac{\overbrace{\sin x}^{\to \sin 1 \in \mathbb{R}^+}}{\underbrace{\ln x}_{\to 0-}} \right) = -\infty$$

gibt es ein $b \in \left]0,1\right[$ mit $f(b) \leq y$, so daß für die differenzierbare, mithin stetige Funktion f nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0,b]$ mit $f(\xi) = y$ existiert. Insgesamt gilt also $W_f = \left]-\infty,0\right]$.

4. a) Die auf dem abgeschlossenen Intervall $D_f = [0,2\pi]$ definierte Funktion

$$f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{3}\,\cos x + \sin x + 1,$$

ist als Summe der stetiger Funktionen selbst stetig und besitzt daher nach dem Satz von Weierstraß ein globales Minimum p und ein globales Maximum q, und für den Wertebereich von f gilt $W_f = [f(p), f(q)]$. Die Funktion f ist als Summe differenzierbarer Funktionen sogar differenzierbar mit

$$f'(x) = -\sqrt{3}\,\sin x + \cos x \qquad \text{für alle} \qquad x \in [0,2\pi]\,;$$

so daß es für ein lokales (und damit insbesondere auch für ein globales) Extremum a von f nur die beiden folgenden Möglichkeiten gibt:

- a ist ein Randpunkt von $D_f = [0, 2\,\pi]$, also $a \in \{0, 2\,\pi\}$.
- a ist im Innern von D_f mit $f'(a) = 0$; wegen

$$f'(x) = 0 \iff -\sqrt{3}\,\sin x + \cos x = 0 \iff$$
$$\iff \sqrt{3}\,\sin x = \cos x \underset{\cos x \neq 0}{\iff} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

für alle $x \in \left]0,2\pi\right[$ ist also $a \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\,\pi}{6}$	$2\,\pi$
$f(a)$	$\sqrt{3}+1$	3	-1	$\sqrt{3}+1$

erhalten wir $p = \frac{7\pi}{6}$ und $q = \frac{\pi}{6}$ und damit $W_f = [-1,3]$.

b) • Die gegebene Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2\,e^x + 1$, ist wegen

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\underbrace{x^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} + 1 \right) = +\infty,$$

nach oben unbeschränkt, insbesondere ohne globales Maximum. Wegen

$$g(x) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} + 1 \geq 0 + 1 = 0^2 \cdot e^0 + 1 = g(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt g in $a = 0$ ein globales Minimum.

- Wir zeigen, daß die Einschränkung $g_0 = g|_{\mathbb{R}_0^+}$ von g auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend und damit insbesondere umkehrbar ist; seien dazu $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x_1 < x_2$. Damit gilt wegen $0 \leq x_1 < x_2$ zum einen $0 \leq x_1^2 < x_2^2$ und wegen der Monotonie der Exponentialfunktion zum anderen $e^{x_1} < e^{x_2}$, mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation also

  $$x_1^2 \cdot e^{x_1} < x_2^2 \cdot e^{x_1} < x_2^2 \cdot e^{x_2}$$

  und damit insgesamt

  $$g_0(x_1) = x_1^2 \cdot e^{x_1} + 1 < x_2^2 \cdot e^{x_2} + 1 = g_0(x_2).$$

  Folglich ist g_0 streng monoton wachsend und damit umkehrbar.
- Da die Funktion g_0 streng monoton wachsend und ihr Definitionsgebiet $D_{g_0} = \mathbb{R}_0^+$ ein Intervall ist, ist die Umkehrfunktion $g_0^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ stetig. Es ist g_0 nach der Produktregel differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt

  $$g_0'(x) = 2\,x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2+x) \cdot x \cdot e^x$$

  mit

  $$g_0'(x) = 0 \iff \underbrace{(2+x)}_{\leq 2 > 0} \cdot x \cdot \underbrace{e^x}_{>0} \iff x = 0.$$

  Die Umkehrfunktion g_0^{-1} ist in allen Punkten $b = g_0(a) \in W_{g_0}$ differenzierbar mit $g_0'(a) \neq 0$, also $a \neq 0$; damit ist g_0^{-1} ist in allen Punkten $b \in W_{g_0}$ mit der Ausnahme $b = g_0(0) = 1$ differenzierbar.