

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. a)
 - Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiere man „ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt“ und „ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend“. (1)
 - Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiere man den Begriff „Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ “. (1)
 - Für eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formuliere man den „Hauptsatz über monotone Folgen“. (1)
- b) Es seien $s, t \in \mathbb{R}^+$ positive reelle Zahlen mit $0 < s < t$ fest gewählt. Man betrachte die durch

$$a_1 = s \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + s \cdot t^2}{1 + s}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Man zeige, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch t nach oben beschränkt ist. (1)
 - Man folgere daraus, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. (1)
 - Man zeige, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimme den Grenzwert. (1)
2. a) Man bestimme alle $p \in \mathbb{N}_0$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + 1}$$

konvergiert. (2)

- b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}^+$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n$$

konvergiert, und berechne hierfür ihre Summe. (2)

- c) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n}$$

konvergiert. (2)

3. a) Man betrachte eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $a \in D$.
- Man definiere die Begriffe „ f ist stetig im Punkt $a \in D$ “ und „ f ist differenzierbar im Punkt $a \in D$ “. (1)
 - Man definiere die Begriffe „ f ist differenzierbar“ und „ f ist stetig differenzierbar“. (1)
- b) Man zeige, daß die Funktion

$$f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \frac{\sin x}{\ln x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist. (2)

- c) Man zeige, daß die Funktion f von b) den Wertebereich $W_f =]-\infty, 0]$ besitzt. (2)

4. a) Für die Funktion

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x + 1,$$

bestimme man den Wertebereich. (3)

- b) Man betrachte die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 e^x + 1.$$

- Man untersuche g auf globale Extrema. (1)
- Man zeige, daß die Einschränkung $g_0 = g|_{\mathbb{R}_0^+}$ umkehrbar ist. (1)
- Man begründe, daß die Umkehrfunktion $g_0^{-1} : W_{g_0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. In welchen Punkten $b \in W_{g_0}$ ist g_0^{-1} auch differenzierbar? (1)