

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. a) Wir zeigen, daß die Abbildung f sowohl injektiv wie surjektiv ist:

- Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt aufgrund des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion $e^{x_1} < e^{x_2}$ und damit

$$f(x_1) = e^{x_1} + 2x_1 < e^{x_2} + 2x_2 = f(x_2);$$

folglich ist f streng monoton wachsend und insbesondere injektiv.

- f ist als Summe der stetigen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x$, und $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = 2x$, selbst stetig. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gibt es wegen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{e^x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{2x}_{\rightarrow -\infty} \right) = -\infty$$

ein $a < 0$ mit $f(a) < y$ sowie wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{e^x}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{2x}_{\rightarrow \infty} \right) = +\infty$$

ein $b > 0$ mit $y < f(b)$, so daß nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a; b]$ mit $f(\xi) = y$ existiert; folglich ist $W_f = \mathbb{R}$ und damit f surjektiv.

Aufgrund der Bijektivität von f besitzen beide Gleichungen jeweils genau eine Lösung; wegen

$$f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 = 1$$

ist $x_1 = 0$ die Lösung von $f(x) = 1$, und wegen

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{e} + 1$$

ist $x_2 = \frac{1}{2}$ die Lösung von $f(x) = 1 + \sqrt{e}$.

- b) Die Funktion f ist auf dem Intervall $\mathbb{R}$ definiert und gemäß a) streng monoton wachsend; ferner ist f als Summe der differenzierbaren Funktionen f_1 und f_2 selbst differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = e^x + 2 > 0 + 2 = 2 > 0;$$

damit ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (in allen Punkten $y \in \mathbb{R}$) differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 2} = \frac{1}{3}$$

und

$$(f^{-1})'(1 + \sqrt{e}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1 + \sqrt{e}))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{e} + 2}.$$

50. Wegen

$$f(-x) = (-x)^3 \cdot \sin \frac{1}{-x} = -x^3 \cdot \left(-\sin \frac{1}{x} \right) = x^3 \cdot \sin \frac{1}{x} = f(x)$$

für alle $x \neq 0$ ist f gerade, der Graph G_f also achsensymmetrisch zur y -Achse. Ferner ist f nach der Produktregel und (für den zweiten Faktor) der Kettenregel in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar mit

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} + x^3 \cdot \left(\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

In allen Punkten $x \neq 0$ ist die Ableitungsfunktion f' als Komposition stetiger Funktionen auch selbst stetig. Für alle $h \neq 0$ gilt ferner

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \left| h^2 \sin \frac{1}{h} \right| = |h^2| \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{h} \right|}_{\leq 1} \leq |h^2| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0;$$

damit ist f auch im Punkt $a = 0$ differenzierbar mit

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

Zum Nachweis, daß die Ableitungsfunktion f' auch im Punkt $a = 0$ stetig ist, berechnen wir für $h \neq 0$

$$\begin{aligned} |f'(h)| &= \left| 3h^2 \sin \frac{1}{h} - h \cos \frac{1}{h} \right| \leq \left| 3h^2 \sin \frac{1}{h} \right| + \left| h \cos \frac{1}{h} \right| = \\ &= |3h^2| \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{h} \right|}_{\leq 1} + |h| \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{1}{h} \right|}_{\leq 1} \leq |3h^2| + |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\lim_{h \rightarrow 0} f'(h) = 0 = f'(0)$, damit ist f' stetig, also f stetig differenzierbar.

An der Stelle $a = 0$ besitzt f kein lokales Extremum: Die Funktion f ist an der Stelle zwar differenzierbar und die notwendige Bedingung $f'(a) = 0$ ist erfüllt, aber für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Punkte $x_-, x_+ \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ mit $f(x_-) < f(0) = 0$ und $f(x_+) > f(0) = 0$; somit liegt in $a = 0$ weder ein lokales Minimum noch ein

lokales Maximum vor. Zum Nachweis der Existenz des Punktes $x_- \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ mit obiger Eigenschaft betrachten wir die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{2}{3\pi + 4\pi \cdot n} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ und

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n^3 \cdot \sin \frac{1}{x_n} = x_n^3 \cdot \sin \underbrace{\frac{3\pi + 4\pi \cdot n}{2}}_{\sin \frac{3\pi}{2} = -1} = -x_n^3 < 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zum Nachweis der Existenz des Punktes $x_+ \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ mit obiger Eigenschaft betrachten wir die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{2}{\pi + 4\pi \cdot n} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ und

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n^3 \cdot \sin \frac{1}{x_n} = x_n^3 \cdot \sin \underbrace{\frac{\pi + 4\pi \cdot n}{2}}_{\sin \frac{\pi}{2} = 1} = x_n^3 > 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

51. Die Funktion f ist als Produkt der stetigen Funktionen $\exp$ und $\cos$ selbst stetig; nach dem Satz von Weierstraß besitzt f demnach ein globales Minimum p und ein globales Maximum q , und für den Wertebereich gilt $W_f = [f(p); f(q)]$.

Mit einer entsprechenden Begründung ist f differenzierbar, und mit der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für ein lokales Extremum a von f gibt es nun die beiden folgenden Möglichkeiten:

- a ist ein Randpunkt von $D_f = [0; 2\pi]$, also $a \in \{0; 2\pi\}$.
- a ist im Innern von D_f ; dann gilt $f'(a) = 0$. Wegen

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = \sin x \iff \tan x = 1$$

ist also $a \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

a	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$f(a)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{4}}$	$e^{2\pi}$

mit $-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{4}} < 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} < e^{2\pi}$ ergibt sich $p = \frac{5\pi}{4}$ und $q = 2\pi$; man erhält also

$$W_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{4}}; e^{2\pi} \right].$$

52. a) Die Funktion $f^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$, ist als Produkt der als stetig vorausgesetzten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit sich selbst, also als Produkt stetiger Funktionen, selbst stetig.

- b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \neq 0, \\ -1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \neq -1 = f(0)$$

(im Punkt $a = 0$) unstetig, wogegen $f^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^2(x) = 1$, als konstante Funktion insbesondere stetig ist.

- c) Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, ist bekanntlich stetig und bijektiv; damit ist auch die Umkehrfunktion $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wegen

$$f = (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f) = g^{-1} \circ f^3$$

ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als Hintereinanderausführung der (als stetig vorausgesetzten) Funktion f^3 und der stetigen Funktion g^{-1} selbst stetig.

- d) Die Funktion $f^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$, ist als Produkt der (als differenzierbar vorausgesetzten) Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit sich selbst, also als Produkt differenzierbarer Funktionen, selbst differenzierbar.
- e) Die in b) betrachtete Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist als unstetige Funktion insbesondere nicht differenzierbar, während f^2 als konstante Funktion auch differenzierbar ist.
- f) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|^{\frac{2}{3}},$$

ist wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|^{\frac{2}{3}} - 0}{x - 0} = \lim_{x > 0} \lim_{x \rightarrow 0+} x^{-\frac{1}{3}} = \infty$$

(im Punkt $a = 0$) nicht differenzierbar, wogegen

$$f^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^3(x) = \left(|x|^{\frac{2}{3}} \right)^3 = |x|^2 = x^2,$$

als quadratische Funktion insbesondere differenzierbar ist.