MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 12
27.01.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

45\. a) Es gilt

$$f(x) = 3\,x^2 - 4\ln|x| - 2\,x^{-2}$$

und damit

$$f'(x) = 3\cdot(2\,x) - 4\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot((-2)\,x^{-3}) = 6\,x - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Mit Hilfe der Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) der Kettenregel erhalten wir

$$g'(x) = 1\cdot\ln(x^2+1) + x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,(2\,x) = \ln(x^2+1) + \frac{2\,x^2}{x^2+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Mit Hilfe der Quotientenregel und (für die Ableitung des Zählers) der Kettenregel erhalten wir

$$h'(x) = \frac{x\cdot(2\,\ln x\cdot\frac{1}{x}) - ((\ln x)^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2\,\ln x - (\ln x)^2 - 1}{x^2} =$$
$$= -\frac{1 - 2\ln x + (\ln x)^2}{x^2} = -\frac{(1-\ln x)^2}{x^2} = -\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

d) Für die Ableitung des ersten Summanden

$$k_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$

verwenden wir die Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) die Kettenregel und erhalten

$$k_1'(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2\,x)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

für alle $x \in \,]-a;a[$; für die Ableitung des zweiten Summanden

$$k_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k_2(x) = \frac{a^2}{2}\,\arcsin\frac{x}{a}$$

verwenden wir dann die Kettenregel und erhalten

$$k_2'(x) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \cdot a^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

für alle $x \in \,]-a; a[$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} k'(x) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right) + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-x^2 + a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}^{\,2}}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \,]-a; a[$.

46. Die allgemeine Potenz a^b für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$a^b = \exp(b \cdot \ln a) = e^{b \ln a}.$$

Dementsprechend ist $f(x) = e^{x \ln x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$; folglich ist f als Verknüpfung der differenzierbaren Funktionen exp (als äußerer Funktion) und $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x \ln x$ (als innerer Funktion) differenzierbar, und nach der Kettenregel und (für das Nachdifferenzieren von f_1) der Produktregel gilt

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (1 + \ln x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

Ferner ist $g(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$; folglich ist f als Verknüpfung der differenzierbaren Funktionen exp (als äußerer Funktion) und $g_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = \frac{1}{x} \ln x$ (als innerer Funktion) differenzierbar, und nach der Kettenregel und (für das Nachdifferenzieren von g_1) der Produktregel gilt

$$g'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

47. a) Zu betrachten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für alle $x \neq 0$ gilt

$$|f(x) - f(0)| = \left|x \cos \frac{1}{x} - 0\right| = |x| \cdot \underbrace{\left|\cos \frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

woraus sich mit dem Schrankenlemma in

$$|f(x) - f(0)| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

die Stetigkeit von f im Punkt $a = 0$ ergibt. Als Differenzenquotient von f im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{x \cos\frac{1}{x}}{x} = \cos\frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad x \neq 0;$$

zum einen ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = 1,$$

zum anderen ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos((2n+1)\pi)}_{=-1} = -1,$$

so daß dieser Differenzenquotient für $x \to 0$ keinen Grenzwert besitzt. Folglich ist f im Punkt $a = 0$ nicht differenzierbar.

b) Zu betrachten ist die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Als Differenzenquotient von g im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{x} = x \cos\frac{1}{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad x \neq 0,$$

und unter Verwendung von a) erhält man die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

im eigentlichen Sinne; folglich ist g im Punkt $a = 0$ differenzierbar und damit insbesondere auch stetig.

48. a)

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{2 \cdot n!};$$

dabei gilt

$$\frac{x^n - (-x)^n}{2 \cdot n!} = \frac{x^n + (-1)^{n+1} \cdot x^n}{2 \cdot n!} = \begin{cases} \frac{x^n - x^n}{2\cdot n!} = 0, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{x^n + x^n}{2\cdot n!} = \frac{x^n}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Damit erhält man schließlich die Reihendarstellung

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}.$$

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{2 \cdot n!};$$

dabei gilt

$$\frac{x^n + (-x)^n}{2 \cdot n!} = \frac{x^n + (-1)^n \cdot x^n}{2 \cdot n!} = \begin{cases} \frac{x^n + x^n}{2 \cdot n!} = \frac{x^n}{n!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{x^n - x^n}{2 \cdot n!} = 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhält man schließlich die Reihendarstellung

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2\,k)!}.$$

Wir vergleichen nun die Reihendarstellungen von sin und sinh bzw. cos und cosh. Es ist zum einen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

und

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

sowie zum anderen

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

und

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Damit unterscheiden sich sin und sinh bzw. cos und cosh lediglich hinsichtich des alternierenden Vorzeichens in den Reihendarstellungen. Mit $a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!}$ und $b_n = \frac{x^{2n}}{(2\,n)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad \text{und} \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

bzw.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = (-1)^n \dfrac{x^n}{(2\,n)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $x = 0$ gilt $a_0 = 1$ sowie $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Im Fall $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\,x^{n+1}}{(2\,(n+1))!} \cdot \frac{(2\,n)!}{(-1)^n\,x^n}\right| = \frac{|x|}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{(2\,n)!}$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

Sei zunächst $x \geq 0$; in diesem Fall gilt also $x = \sqrt{x}^{\,2}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ damit $x^n = \left(\sqrt{x}^{\,2}\right)^n = \sqrt{x}^{\,2\,n}$, woraus sich

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{\,2n}}{(2n)!} = \cos\sqrt{x}$$

ergibt. Sei nun $x < 0$, also $-x > 0$; in diesem Fall gilt also $-x = \sqrt{-x}^{\,2}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ damit $(-x)^n = \left(\sqrt{-x}^{\,2}\right)^n = \sqrt{-x}^{\,2\,n}$, woraus sich

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{-x}^{\,2\,n}}{(2n)!} = \cosh\sqrt{-x}$$

ergibt.