MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 11
20.01.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

41. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1};$$

aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion exp ergibt sich, daß auch die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^x \cdot e,$$

und

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = e^x + 1,$$

und damit ihr Quotient $f = \frac{f_1}{f_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt aufgrund des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion exp zunächst $e^{x_1} < e^{x_2}$ und damit

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{e^{x_1}\, e}{e^{x_1} + 1} - \frac{e^{x_2}\, e}{e^{x_2} + 1} = \frac{e^{x_1}\, e\,(e^{x_2} + 1) - e^{x_2}\, e\,(e^{x_1} + 1)}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)} = \\ &= \frac{e}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)}\,(e^{x_1}\,(e^{x_2} + 1) - e^{x_2}\,(e^{x_1} + 1)) = \\ &= \frac{e}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)}\,((e^{x_1}\, e^{x_2} + e^{x_1}) - (e^{x_2}\, e^{x_1} + e^{x_2})) = \\ &= \underbrace{\frac{e}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)}}_{>0} \cdot \underbrace{(e^{x_1} - e^{x_2})}_{<0} < 0, \end{aligned}$$

also $f(x_1) < f(x_2)$; damit ist f streng monoton wachsend.

b) Wegen

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

ergibt sich

$$f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{0 \cdot e}{0 + 1} = 0$$

sowie

$$f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} = \frac{e}{1 + \frac{1}{e^x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{1 + 0} = e.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner $0 < e^x \cdot e < (e^x + 1) \cdot e$ und damit

$$0 < f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} < e,$$

woraus sich zunächst $W_f \subseteq\,]0; e[$ ergibt; zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei nun $y \in\,]0; e[$. Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$, und wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$ gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > y$; nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\xi \in [a; b]$ mit $f(\xi) = y$. Insgesamt gilt also $W_f = \,]0; e[$.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und damit insbesondere umkehrbar. Zur Berechnung der Umkehrfunktion $f^{-1} : \,]0; e[\, \to \mathbb{R}$ betrachten wir ein $y \in\,]0; e[$; dabei gilt

$$f(x) = y \iff \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} = y \iff e^x \cdot e = y\,(e^x + 1) \iff$$
$$\iff e \cdot e^x = y \cdot e^x + y \iff (e - y) \cdot e^x = y \underset{e-y \neq 0}{\iff}$$
$$\iff e^x = \frac{y}{e - y} \underset{\frac{y}{e-y} > 0}{\iff} x = \ln \frac{y}{e - y},$$

so daß sich für die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \,]0; e[\, \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \ln \frac{y}{e - y},$$

ergibt.

42. a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wegen $e^{-n\,x} = (e^{-x})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ handelt es sich bei der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n\,x}$ um die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = e^{-x}$; diese konvergiert aber genau für $|q| < 1$. Wegen

$$|q| < 1 \iff |e^{-x}| < 1 \iff e^{-x} < 1 \iff -x < 0 \iff x > 0$$

konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n\,x}$ genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$; es ist $D = \mathbb{R}^+$.

b) Für alle $x \in D$ gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

43. a) Das maximale Definitionsgebiet D von f umfaßt genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die beide auftretenden Argumente des natürlichen Logarithmus positiv sind. Wegen

		-4		2	
$x+4$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x-2$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{x-2}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

ist $D_1 = \,]-\infty; -4[\, \cup \,]2; \infty[$, und wegen

		-1		3	
$x-3$	$-$	0	$-$	$\vert$	$+$
$x+1$	$-$	$\vert$	$+$	0	$+$
$\frac{x-3}{x+1}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

ist $D_2 = \,]-\infty; -1[\, \cup \,]3; \infty[$; folglich ergibt sich

$$D = D_1 \cap D_2 = \,]-\infty; -4[\, \cup \,]3; \infty[\, = \mathbb{R} \setminus [-4; 3]\,.$$

b) Für alle $x \neq 0$ ist

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1-0} = 1$$

sowie

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1+0} = 1;$$

mit der Stetigkeit des natürlichen Logarithmus ln ergibt sich daraus

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\ln \frac{x+4}{x-2} - \ln \frac{x-3}{x+1} - 2\,\ln 3 \right) =$$
$$= \ln 1 - \ln 1 - 2\,\ln 3 = 0 - 0 - 2 \ln 3 = -2\,\ln 3.$$

Des weiteren ergibt sich

$$\lim_{x\to -4-} f(x) = \lim_{x\to -4-} \left(\ln \underbrace{\frac{x+4}{x-2}}_{\longrightarrow 0+} - \ln \underbrace{\frac{x-3}{x+1}}_{\longrightarrow \frac{7}{3}} -2\,\ln 3 \right) = -\infty$$

sowie

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} \left(\ln \underbrace{\frac{x+4}{x-2}}_{\longrightarrow 7} - \ln \underbrace{\frac{x-3}{x+1}}_{\longrightarrow 0+} -2\,\ln 3 \right) = +\infty.$$

c) Für alle $x \in D$ mit $f(x) = 0$ gilt

$$\ln \frac{x+4}{x-2} - \ln \frac{x-3}{x+1} = 2\,\ln 3 \implies \ln \frac{(x+4)\,(x+1)}{(x-2)\,(x-3)} = \ln 9 \implies$$
$$\frac{(x+4)\,(x+1)}{(x-2)\,(x-3)} = 9 \implies x^2 + 5\,x + 4 = 9\left(x^2 - 5\,x + 6\right) \implies$$
$$8\,x^2 - 50\,x + 50 = 0 \implies 4\,x^2 - 25\,x + 25 = 0 \implies$$
$$x = \frac{1}{2\cdot 4}\left(-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\cdot 4\cdot 25}\right) = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{25 \pm 15}{8}$$

Damit ist $x = 5$ oder $x = \frac{5}{4}$, und wegen $\frac{5}{4} \notin D$ gilt $x = 5$. Wegen

$$f(5) = \ln \frac{5+4}{5-2} - \ln \frac{5-3}{5+1} - 2\,\ln 3 = \ln 3 - \underbrace{\ln \frac{1}{3}}_{=-\ln 3} -2\,\ln 3 = 0$$

ist $x = 5$ die einzige Nullstelle von f.

44. Für alle x, $y > 0$ gilt

$$\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2} \iff \ln x + \ln y \leq 2\, \ln \frac{x+y}{2} \iff$$

$$\iff \ln(x \cdot y) \leq \ln \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \underset{(*)}{\iff} x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \iff$$

$$\iff x\,y \leq \frac{(x+y)^2}{4} \iff 4\,x\,y \leq x^2 + 2\,x\,y + y^2 \iff$$

$$\iff 0 \leq x^2 - 2\,x\,y + y^2 \iff 0 \leq (x-y)^2;$$

dabei geht bei der Umformung $(*)$ ein, daß sowohl die Exponentialfunktion exp (für „$\Longrightarrow$“) als auch die Logarithmusfunktion ln (für „$\Longleftarrow$“) monoton wachsend sind. Da nun die Ungleichung $0 \leq (x-y)^2$ für alle x, $y > 0$ erfüllt ist, erhält man über die Kette von Äquivalenzumformungen („$\iff$“), daß auch die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}$$

für alle x, $y > 0$ gilt.

Es sei bemerkt, daß zur vollständigen Lösung bereits die Implikationsrichtung „$\Longleftarrow$“ ausreichend ist; man kann dann wie folgt argumentieren: für alle x, $y > 0$ gilt

$$0 \leq (x-y)^2 \implies 0 \leq x^2 - 2\,x\,y + y^2 \implies 4\,x\,y \leq x^2 + 2\,x\,y + y^2 \implies$$

$$\implies x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \underset{\text{ln monoton wachsend}}{\implies} \ln(x \cdot y) \leq \ln \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \implies$$

$$\implies \ln x + \ln y \leq 2\, \ln \frac{x+y}{2} \implies \frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}.$$