MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 9
16.12.2013

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. Für alle λ, $\mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- Die Einschränkung $f|_{]-\infty;-1[}$ von f auf das Intervall $]-\infty;-1[$ ist als lineare Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\,]-\infty;-1[$ stetig ist: bei $x \to a$ ist nämlich schließlich auch $x \in\,]-\infty;-1[$ und damit

$$f(x) = \lambda\, x + \mu \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\, a + \mu = f(a).$$

- Die Einschränkung $f|_{[-1;1]}$ von f auf das Intervall $[-1;1]$ ist als quadratische Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\,]-1;1[$ stetig ist: bei $x \to a$ ist nämlich schließlich auch $x \in\,]-1;1[$ und damit

$$f(x) = x^2 + \lambda\, \mu\, x + 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} a^2 + \lambda\, \mu\, a + 1 = f(a).$$

- Die Einschränkung $f|_{]1;\infty[}$ von f auf das Intervall $]1;\infty[$ ist als lineare Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\,]1;\infty[$ stetig ist: bei $x \to a$ ist nämlich schließlich auch $x \in\,]1;\infty[$ und damit

$$f(x) = \mu\, x + \lambda \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mu\, a + \lambda = f(a).$$

Wegen

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \left(x^2 + \lambda\, \mu\, x + 1\right) = 2 - \lambda\, \mu = f(-1)$$

und

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1+} (\lambda\, x + \mu) = -\lambda + \mu;$$

damit ist f im Punkt $a = -1$ genau dann stetig, wenn

$$2 - \lambda\, \mu = -\lambda + \mu$$

gilt. Wegen

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} (\mu\, x + \lambda) = \mu + \lambda;$$

und

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(x^2 + \lambda\, \mu\, x + 1\right) = 2 + \lambda\, \mu = f(1)$$

damit ist f im Punkt $a = 1$ genau dann stetig, wenn

$$\mu + \lambda = 2 + \lambda\, \mu$$

gilt. Die Funktion f ist also genau dann stetig, wenn

$$2 - \lambda\,\mu = -\lambda + \mu \qquad \text{und} \qquad \mu + \lambda = 2 + \lambda\,\mu$$

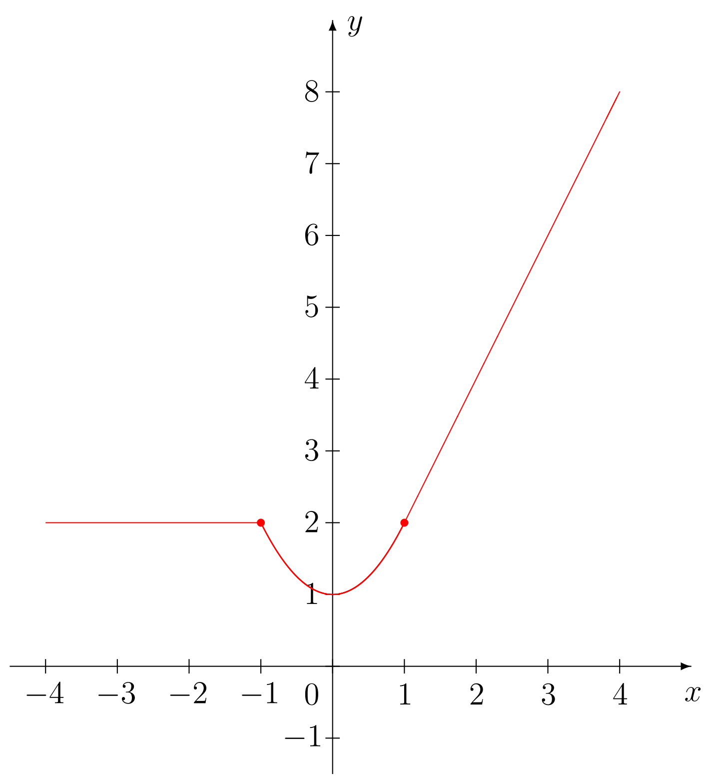
gilt. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt

$$2 + \lambda - \mu = \lambda\,\mu = \mu + \lambda - 2,$$

also $\mu = 2$ und $\lambda = 0$; umgekehrt erfüllt das Paar $(\lambda, \mu) = (0, 2)$ beide Gleichungen.

Die also genau im Falle $(\lambda, \mu) = (0, 2)$ stetige Funktion lautet

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } x < -1, \\ x^2 + 1, & \text{für } -1 \le x \le 1, \\ 2\,x, & \text{für } 1 < x. \end{cases}$$



34. Sei $a \in \mathbb{R}$; wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $a \in \mathbb{Q}$; es ist also $f(a) = 1$. Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist aber $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und damit $f(x_n) = 0$, woraus sich $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(a)$ ergibt.
- Fall 2: $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; es ist also $f(a) = 0$. Gemäß Tutoriumsaufgabe 4 gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Wegen $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(a)$.

Folglich ist f in a unstetig.

35. Nach Voraussetzung ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion; es gibt also ein $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ergibt sich

$$|g(x_n)| = |x_n\, f(x_n)| = |x_n| \cdot |f(x_n)| \leq |x_n| \cdot M \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

nach dem Schrankenlemma folgt also

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0 = 0 \cdot f(0) = g(0).$$

Damit ist aber die Stetigkeit der Funktion g im Punkt $a = 0$ gezeigt.

36. a) Die Aussage ist wahr. Da $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist, gilt für alle $x_1,\, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen $D_0 \subseteq D$ gilt auch für alle $x_1,\, x_2 \in D_0$ mit $x_1 \neq x_2$ dann $f_0(x_1) \neq f_0(x_2)$, also ist auch $f_0 : D_0 \to \mathbb{R}$ injektiv.

b) Die Aussage ist falsch; wir widerlegen dies mit einem Gegenbeispiel. Sei dazu $f_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f_0(x) = x^2$. Seien $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $f_0(x_1) = f_0(x_2)$; damit ist $x_1^2 = x_2^2$ und folglich gilt wegen $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ schon $x_1 = x_2$, also ist $f_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ injektiv. Hingegen ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, wegen $f(-1) = 1 = f(1)$ und $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ nicht injektiv.

c) Die Aussage ist falsch; wir widerlegen dies mit einem Gegenbeispiel. Sei dazu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$. Sei $y \in \mathbb{R}$; damit ist $x = y$, woraus sich $f(x) = x = y$ ergibt, also ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv. Hingegen ist $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x$, wegen $-1 \notin f_0(\mathbb{R}^+)$ nicht surjektiv.

d) Die Aussage ist wahr. Da $f_0 : D_0 \to \mathbb{R}$ surjektiv ist, gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}$ (mindestens) ein $x \in D_0$ mit $f_0(x) = y$. Wegen $D_0 \subseteq D$ gibt es auch für jedes $y \in \mathbb{R}$ (mindestens) ein $x \in D$ mit $f(x) = y$, also ist auch $f : D \to \mathbb{R}$ surjektiv.

e) Die Aussage ist wahr. Da $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D_0$ stetig ist, gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ schon $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Wegen $a \in D_0 \subseteq D$ gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D_0 mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ schon $\lim_{n\to\infty} f_0(x_n) = f_0(a)$, also ist auch $f_0 : D_0 \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D_0$ stetig.

f) Die Aussage ist falsch; wir widerlegen dies mit einem Gegenbeispiel. Sei dazu $f_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = x + 1$; es ist f_0 als lineare Funktion stetig auf $\mathbb{R}_0^+$ und damit insbesondere auch im Punkt $a = 0$. Hingegen ist ihre Fortsetzung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{für } x \geq 0, \\ x, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

in $a = 0$ nicht stetig, denn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^-$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$, also ist $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. Es würde hierfür auch die Betrachtung einer geeigneten Folge genügen: so gilt etwa für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = -\frac{1}{n}$ zum einen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und zum anderen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{x_n<0}{=} \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \neq 1 = f(0)$.