

## Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. Für die beiden Reihen in der ersten Zeile gilt:

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{4n^2}{2n^4 + 1} \leq \frac{4n^2}{2n^4} = \frac{2}{n^2}.$$

Mit der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  konvergent; damit besitzt die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{2n^4 + 1}$  die konvergente Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{3n^3}{2n^4 - 1} \geq \frac{3n^3}{2n^4} = \frac{3}{2n}.$$

Mit der harmonischen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n}$  divergent; damit besitzt die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{2n^4 - 1}$  die divergente Minorante  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n}$  und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

Für die beiden Reihen in der zweiten Zeile gilt:

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}n}.$$

Mit der harmonischen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n}$  divergent; damit besitzt die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{2n^4 - 1}$  die divergente Minorante  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n}$  und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}.$$

Damit besitzt die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}}$  die konvergente Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

26. Zu betrachten ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit

$$a_n = \binom{2n}{n} x^n = \frac{(2n)! \cdot x^n}{n! \cdot n!}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ; dabei ist  $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (2n)$ . Für  $x = 0$  ist also  $a_0 = 1$  und  $a_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; insbesondere ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent,

wobei für die Summe dieser Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$  gilt. Für  $x \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(2(n+1))! \cdot x^{n+1}}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2n)! \cdot x^n} \right| = \\ &= \left| \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} \cdot |x| = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot 2 \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4|x|. \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  nach dem Quotientenkriterium

- für  $4|x| < 1$ , also für  $|x| < \frac{1}{4}$ , (absolut) konvergent, sowie
- für  $4|x| > 1$ , also für  $|x| > \frac{1}{4}$ , divergent.

Für den verbleibenden (und hier nicht zu betrachtenden) Fall  $4|x| = 1$ , also  $|x| = \frac{1}{4}$ , trifft das Quotientenkriterium keine Aussage.

27. Zu betrachten ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \right|} &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} |x|^n} = \\ &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \cdot \sqrt[n]{|x|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e|x|. \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nach dem Wurzelkriterium

- a) für  $e|x| < 1$ , also für  $|x| < \frac{1}{e}$ , (absolut) konvergent, sowie
- b) für  $e|x| > 1$ , also für  $|x| > \frac{1}{e}$ , divergent.

Für den verbleibenden (und hier nicht zu betrachtenden) Fall  $e|x| = 1$ , also  $|x| = \frac{1}{e}$ , trifft das Wurzelkriterium keine Aussage.

28. a) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachte man etwa die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

sowie die Folge

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad b_n = (-1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist (nach dem Leibnizschen Kriterium) konvergent und die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  offensichtlich beschränkt, die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  aber divergent.

- b) Die Aussage ist richtig: die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bedeutet

die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , und wegen der Beschränktheit der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert eine reelle Konstante  $M > 0$  mit  $|b_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; damit gilt aber

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M} \leq M \cdot |a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so daß die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  die (wie die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ebenfalls) konvergente

Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} M |a_n|$  besitzt und folglich nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent ist.