MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 6
25.11.2013

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ handelt es sich bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n}$$

um eine geometrische Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n \qquad \text{mit} \quad c = x+3 \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{x-3};$$

diese konvergiert aber genau für $c = 0$ oder $|q| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n = \frac{c}{1-q}.$$

Wegen

$$|q| < 1 \iff \frac{1}{|x-3|} < 1 \iff 1 < |x-3| \iff$$
$$\iff x-3 < -1 \text{ oder } x-3 > 1 \iff x < 2 \text{ oder } x > 4$$

konvergiert also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n}$$

genau für alle

$$x \in \,]-\infty; 2[\, \cup \,]4; \infty[\, = \mathbb{R} \setminus [2; 4]\,,$$

und für die Summe der Reihe gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n} = \frac{x+3}{1 - \dfrac{1}{x-3}} = \frac{(x+3)\,(x-3)}{(x-3)-1} = \frac{x^2-9}{x-4}.$$

22. a)
- Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ sei konvergent; da aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergent ist, ist damit auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}((a_n+b_n)-b_n)$, also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ divergent.
  Entsprechend schließt man auf die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)$.
- Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\cdot a_n)$ sei konvergent; wegen $\lambda\neq 0$ ist $\frac{1}{\lambda}\in\mathbb{R}$, und damit ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda\cdot a_n)\right)$, also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\cdot a_n)$ divergent.

b)
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist konvergent und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergent; nach a) divergiert damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$.
- Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(n^2+1)^2}{n^6}=\frac{n^4+2\,n^2+1}{n^6}=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^6};$$

  da nun die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ konvergieren und gemäß Vorlesung die Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\quad\text{und}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

  besitzen, ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)^2}{n^6}$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)^2}{n^6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^4}{45}+\frac{\pi^6}{945}.$$

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(n^2+1)^2}{n^5} = \frac{n^4 + 2\,n^2 + 1}{n^5} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5};$$

  da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ konvergieren, ist nach a) auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^5}$ divergent.

23. Aus der Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ergibt sich notwendig, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder eine Nullfolge ist; damit ist aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

weswegen die Folge $\displaystyle\left(\frac{1}{1+a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere keine Nullfolge ist und damit die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ sicher divergiert.

24. - Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist wegen

$$a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend und wegen

$$0 \leq a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  eine Nullfolge; damit konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

  nach den Leibnizschen Konvergenzkriterium.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist monoton fallend, und für den Grenzwert gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; damit konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

nach den Leibnizschen Konvergenzkriterium. Da aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, ist damit auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

divergent.

- Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ keine Nullfolge; damit ist aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{2}$ divergent.