MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 5
18.11.2013

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a_n = \begin{cases} (2\,k-1)\cdot\left(1+(-1)^{2k-1}\right) = 0, & \text{falls } n = 2\,k-1 \text{ ungerade,} \\ 2\,k\cdot\left(1+(-1)^{2k}\right) = 4\,k, & \text{falls } n = 2\,k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = +\infty$, so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Häufungspunkt $b = 0$ besitzt.

Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{4\,k\,\pi}{2}\right) = \sin\left(2\,k\,\pi\right) = 0, & \text{falls } n = 4\,k, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-1)\,\pi}{2}\right) = \sin\left(2\,k\,\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1, & \text{falls } n = 4\,k-1, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-2)\,\pi}{2}\right) = \sin\left(2\,k\,\pi - \pi\right) = 0, & \text{falls } n = 4\,k-2, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-3)\,\pi}{2}\right) = \sin\left(2\,k\,\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 1, & \text{falls } n = 4\,k-3, \end{cases}$$

und damit

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4\,k, \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, & \text{falls } n = 4\,k-1, \\ 1, & \text{falls } n = 4\,k-2, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & \text{falls } n = 4\,k-3. \end{cases}$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt wegen

$$\lim_{k\to\infty} b_{4k} = \lim_{k\to\infty} b_{4k-2} = 1 \quad \text{sowie} \quad \lim_{k\to\infty} b_{4k-1} = \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} b_{4k-3} = e$$

die drei Häufungspunkte $c_1 = 1$ sowie $c_2 = \frac{1}{e}$ und $c_3 = e$.

Da durch die Betrachtung der Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_{4k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfasst werden, gibt somit genau die oben bestimmten (und keine weiteren) Häufungspunkte.

18. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zunächst $a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \geq \frac{1}{2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$: es gilt zum einen

$$a_{2^{\ell+1}} = \sum_{k=1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{\ell+1}}$$

und anderen

$$a_{2^\ell} = \sum_{k=1}^{2^\ell} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^\ell},$$

insgesamt also

$$a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2^\ell + 1}}_{\geq \frac{1}{2^{\ell+1}}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{\ell+1}}}_{\geq \frac{1}{2^{\ell+1}}}}_{\text{insgesamt } 2^\ell \text{ Summanden}} \geq 2^\ell \cdot \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2}.$$

Wir folgern nun, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dabei eine Cauchyfolge, wenn die Aussage

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

gilt; die Negation der Aussage lautet damit

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, m, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$; für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $2^\ell > n_0$, und mit $m = 2^\ell \geq n_0$ und $n = 2^{\ell+1} \geq n_0$ gilt dann $|a_n - a_m| = |a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell}| = a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \underset{\text{s.o.}}{\geq} \frac{1}{2} = \varepsilon$.

19. a) Wir zeigen die Formel für die Partialsummen mit vollständiger Induktion:

„$n = 2$“: Es ist $s_2 = a_2 = \dfrac{1}{2 \cdot (2^2 - 1)} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2 \cdot 2 \cdot (2+1)}$.

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} s_{n+1} = s_n + a_{n+1} &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\,n\,(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)\,((n+1)^2 - 1)} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\,n\,(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\,(n^2 + 2\,n)} = \frac{1}{4} + \frac{-(n+2) + 2}{2\,n\,(n+1)\,(n+2)} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{-n}{2\,n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\,(n+1)\,(n+2)}. \end{aligned}$$

b) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\,n\,(n+1)}\right) = \frac{1}{4}$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n^2-1)}$ als Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergent,

und für ihre Summe gilt $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n^2-1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$.

20. a) Wir zeigen zunächst

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 2$": Es ist

$$\sum_{k=2}^{2} a_k = a_2 = \frac{8}{9} = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2+1)^2}\right)$$

„$n \to n+1$": Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} a_k &= \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \\
&= \left(\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) + \frac{4\,(n+1)}{\left((n+1)^2-1\right)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{4\,(n+1)}{\left(n^2+2\,n\right)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{4\,(n+1)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{(n+2)^2 - 4\,(n+1)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{(n^2+4\,n+4) - (4\,n+4)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right)
\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt

$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_k = \frac{3}{4} + (-1)^n \cdot \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 2$": Es ist

$$\sum_{k=2}^{2} (-1)^k a_k = a_2 = \frac{8}{9}$$

und

$$\frac{3}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot (2+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}.$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k a_k &= \left(\sum_{k=2}^{n}(-1)^k a_k\right) + (-1)^{n+1} a_{n+1} \\
&= \left(\frac{3}{4} + (-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}\right) + (-1)^{n+1} \frac{4\,(n+1)}{\left((n+1)^2-1\right)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{4\,(n+1)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{-(2\,n+1)\,(n+2)^2 + 4\,(n+1)\,(n+1)^2}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{-(2\,n+1)\,(n^2+4\,n+4) + 4\,(n+1)^3}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \cdot \\
&\qquad \Big[-\left(2\,n^3 + 8\,n^2 + 8\,n + n^2 + 4\,n + 4\right) + \\
&\qquad\quad 4\left(n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1\right) \Big] \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \cdot \left[2\,n^3 + 3\,n^2\right] \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{n^2\,(2\,n+3)}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{2\,n+3}{(n+1)^2\,(n+2)^2}.
\end{aligned}$$

b) Wegen

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\to 0}\Bigg) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{5}{4}$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \frac{5}{4}$.
Ferner ist wegen

$$\left|(-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}\right| = \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} = \Bigg(\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\Bigg) \cdot \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

damit

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k a_k = \frac{3}{4} + (-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}$$

die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, a_n = \frac{3}{4}.$$