Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. Im Falle der Konvergenz der durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kommen für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ wegen

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) = \frac{1}{5}\left(a^2 + 6\right)$$

und damit

$$0 = a^2 - 5\,a + 6 \underset{\text{Vieta}}{=} (a-2)(a-3)$$

nur die beiden Werte $a = 2$ und $a = 3$ in Frage. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [0;3]$:

- Für $a_0 = 2$ ist $a_1 = \frac{1}{5}\left(2^2 + 6\right) = \frac{1}{5}\cdot 10 = 2$ und analog $a_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 2$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{5}\left(3^2 + 6\right) = \frac{1}{5}\cdot 15 = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 3$.
- Für $a_0 \in \,]2;3[$ zeigen wir zunächst $a_n \in \,]2;3[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$“ ist dies klar, und für „$n \to n+1$“ gilt

$$a_n \in \,]2;3[\implies 2 < a_n < 3 \implies 4 < a_n^2 < 9 \implies 10 < a_n^2 + 6 < 15 \implies$$
$$\implies 2 < \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) < 3 \implies 2 < a_{n+1} < 3 \implies a_{n+1} \in \,]2;3[\,.$$

Damit ergibt sich aber

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 - 5\,a_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(a_n - 3)}_{<0}\underbrace{(a_n - 2)}_{>0} < 0$$

und somit $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend und (etwa durch 2) nach unten beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

- Für $a_0 \in [0;2[$ zeigen wir zunächst $a_n \in [0;2[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$" ist dies klar, und für „$n \to n+1$" gilt

$$a_n \in [0;2[\implies 0 \leq a_n < 2 \implies 0 \leq a_n^2 < 4 \implies 6 \leq a_n^2 + 6 < 10 \implies$$
$$\implies \frac{6}{5} \leq \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) < 2 \implies 0 \leq a_{n+1} < 2 \implies a_{n+1} \in [0;2[\,.$$

Damit ergibt sich aber

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 - 5\,a_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(a_n - 3)}_{<0}\underbrace{(a_n - 2)}_{<0} > 0$$

und somit $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend und (etwa durch 2) nach oben beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

14. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}} = \frac{(2n^2+1)\cdot(n+1)^n}{(3n+1)\cdot(n\cdot n^n)} = \frac{2n^2+1}{(3n+1)\cdot n}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} =$$
$$= \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

so daß der erste Faktor wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

als Quotient konvergenter Folgen selbst konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3};$$

der zweite Faktor ist eine bekanntlich monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge mit dem Grenzwert e, so daß die gegebene Folge als Produkt konvergenter Folgen selbst konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}}_{\to\frac{2}{3}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\right) = \frac{2}{3}\,e.$$

15. Sei c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen; sei etwa $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ diese Teilfolge mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c.$$

Folglich gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = c^2;$$

dabei ist $\left(a_{n_k}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der sogar als konvergent vorausgesetzten Folge $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Damit erhalten wir

$$c^2 = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2,$$

woraus sich aber sofort $c = a$ oder $c = -a$ ergibt.

16. a) Man betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{und} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Wir erhalten mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung $(*)$ zum einen

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^n} = \\
&= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \underset{(*)}{\geq} \\
&\geq \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\right) = \\
&= \frac{(n+2)\cdot(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3\,n^2+3\,n+2}{n^3+3\,n^2+3\,n+1} \geq 1
\end{aligned}$$

sowie zum anderen

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}} = \\
&= \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} \underset{(*)}{\geq} \\
&\geq \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n\cdot(n+2)}\right) = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+2)+n+1}{n\cdot(n+2)}\right) = \\
&= \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{n^2+3\,n+1}{n^2+2\,n}\right) = \frac{n^3+4\,n^2+4\,n+1}{n^3+4\,n^2+4\,n} \geq 1.
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.

- Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $1+\frac{1}{n} > 1$ und damit

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n.$$

- Nach a) gilt wegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n > 0$ schon $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
- Nach a) gilt wegen $\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$ und $b_{n+1} > 0$ schon $b_n \geq b_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq b_n \leq b_1$ und damit

$$\begin{aligned} 0 \leq b_n - a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= a_n \cdot \frac{1}{n} \leq b_1 \cdot \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b_1 \cdot 0 = 0; \end{aligned}$$

  folglich ist $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Schrankenlemma eine Nullfolge.

Es sei bemerkt, daß für die durch diese Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ definierte eulersche Zahl $e \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ gemäß

$$\frac{7776}{3125} = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = a_5 \leq e \leq b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625}$$

insbesondere $2 < e < 3$ gilt.