MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 3
04.11.2013

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 10^6$ gilt

$$\sqrt{n} < \sqrt{10^6} = 10^3 = 1000;$$

daraus folgt dann

$$\frac{1}{1000} < \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{und damit} \qquad \frac{n}{1000} < \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Zusammengefaßt erhält man

$$1000 > \sqrt{n} > \frac{n}{1000} \qquad \text{und damit} \qquad n + 1000 > n + \sqrt{n} > n + \frac{n}{1000},$$

wegen der Monotonie der Quadratwurzel also

$$\sqrt{n+1000} > \sqrt{n+\sqrt{n}} > \sqrt{n + \frac{n}{1000}}$$

und damit

$$\sqrt{n+1000} - \sqrt{n} > \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} > \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n},$$

also $a_n > b_n > c_n$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1000} - \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1000}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1000) - n}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} = \frac{1000}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}^{\,2} - \sqrt{n}^{\,2}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{(n+\sqrt{n}) - n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

und

$$c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{1000}} - 1 \right)}_{>0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

10. a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$\text{Es ist } a_1 = 5 \text{ und damit } 3 \le a_1 \le 5.$$

„$n \to n+1$“:

$$3 \le a_n \le 5 \implies 4 \ge 7 - a_n \ge 2 \implies \frac{1}{2} \le \frac{2}{7-a_n} \le 1 \implies$$
$$\frac{7}{2} \le 3 + \frac{2}{7-a_n} \le 4 \implies 3 \le a_{n+1} \le 5$$

b) Wir zeigen $a_n \ge a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$a_1 = 5 \ge 4 = 3 + \frac{2}{7-5} = a_2.$$

„$n \to n+1$“:

$$a_n \ge a_{n+1} \implies 7 - a_n \le 7 - a_{n+1} \implies \frac{2}{7-a_n} \ge \frac{2}{7-a_{n+1}} \implies$$
$$a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7-a_n} \ge 3 + \frac{2}{7-a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $3 \le a \le 5$ gemäß a), und damit erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2}{7-a_n} \right) = 3 + \frac{2}{7 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 3 + \frac{2}{7-a}.$$

Damit folgt

$$(a-3)\,(7-a) = 2 \implies -a^2 + 10\,a - 21 = 2 \implies$$
$$a^2 - 10\,a + 23 = 0 \implies a = \frac{10 \pm \sqrt{8}}{2} = 5 \pm \sqrt{2};$$

wegen $3 \le a \le 5$ folgt hieraus schon $a = 5 - \sqrt{2}$.

11. a) Wir zeigen $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:
„$n = 1$“: Wegen $a_1 = \frac{1}{2}$ ist $0 < a_1 < 1$.

„$n \to n+1$“: Es ist also $0 < a_n < 1$. Wegen $a_n > 0$ ist

$$2\,a_n + 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad 2 + a_n > 0$$

und damit

$$a_{n+1} = \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} > 0;$$

ferner ist wegen $a_n < 1$ auch $a_n - 1 < 0$ und damit

$$a_{n+1} - 1 = \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} - 1 = \frac{(2\,a_n + 1) - (2 + a_n)}{2 + a_n} = \frac{a_n - 1}{2 + a_n} < 0,$$

also $a_{n+1} < 1$. Insgesamt gilt also $0 < a_{n+1} < 1$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n < 1$ gemäß a), woraus $2 + a_n > 0$ und $a_n^2 < 1$, also $1 - a_n^2 > 0$ folgt; somit erhält man

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} - a_n = \frac{(2\,a_n + 1) - a_n(2 + a_n)}{2 + a_n} &= \\ = \frac{2\,a_n + 1 - 2\,a_n - a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 - a_n^2}{2 + a_n} &> 0, \end{aligned}$$

also $a_{n+1} > a_n$. Damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend.

c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gemäß b) (streng) monoton wachsend und gemäß a) (nach oben) beschränkt, also konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} = \frac{2\,a + 1}{2 + a},$$

woraus sich

$$a\,(2 + a) = 2\,a + 1, \qquad \text{also} \qquad 2\,a + a^2 = 2\,a + 1,$$

und damit

$$a^2 = 1, \qquad \text{also} \qquad a \in \{-1, 1\}$$

ergibt; wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muß auch $a \geq 0$ gelten, womit man schließlich $a = 1$ erhält.

12. a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Folgenglied

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

die Summe der $n+1$ aufeinanderfolgenden Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, $\ldots$, $\frac{1}{2n}$; damit ergibt sich zum einen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\leq \frac{1}{n}} \leq (n+1) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

und zum anderen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\leq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0;$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend. Zusammen mit der in a) gezeigten Beschränktheit ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ insbesondere also konvergent.