MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 2
28.10.2013

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach dem binomischen Lehrsatz bzw. der binomischen Formel

- $(2\,n^2+3)^3 = (2\,n^2)^3+3\,(2\,n^2)^2\cdot 3+3\,(2\,n^2)\cdot 3^2+3^3 = 8\,n^6+36\,n^4+54\,n^2+27$
- $(3\,n^3+2)^2 = (3\,n^3)^2+2\,(3\,n^3)\cdot 2+2^2 = 9\,n^6+12\,n^3+4$

und damit

$$\frac{(2\,n^2+3)^3}{(3\,n^3+2)^2} = \frac{8\,n^6+36\,n^4+54\,n^2+27}{9\,n^6+12\,n^3+4} = \\ = \frac{n^6\left(8+\frac{36}{n^2}+\frac{54}{n^4}+\frac{27}{n^6}\right)}{n^6\left(9+\frac{12}{n^3}+\frac{4}{n^6}\right)} = \frac{8+\frac{36}{n^2}+\frac{54}{n^4}+\frac{27}{n^6}}{9+\frac{12}{n^3}+\frac{4}{n^6}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{8+0+0+0}{9+0+0} = \frac{8}{9}$$

sowie

$$(2\,n^2+3)^3-(3\,n^3+2)^2 = -n^6+36\,n^4-12\,n^3+54\,n^2+23 = \\ = \underbrace{n^6}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\left(-1+\frac{36}{n^2}-\frac{12}{n^3}+\frac{54}{n^4}+\frac{23}{n^6}\right)}_{\to -1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Zu diesen Ergebnissen kann man auch gelangen, ohne die Potenzen der beiden auftretenden Summen zu berechnen; es ist nämlich

$$\frac{(2\,n^2+3)^3}{(3\,n^3+2)^2} = \frac{\left(n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)\right)^3}{\left(n^3\left(3+\frac{2}{n^3}\right)\right)^2} = \frac{n^6\left(2+\frac{3}{n^2}\right)^3}{n^6\left(3+\frac{2}{n^3}\right)^2} = \frac{\left(2+\frac{3}{n^2}\right)^3}{\left(3+\frac{2}{n^3}\right)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(2+0)^3}{(3+0)^2} = \frac{8}{9}$$

sowie

$$(2\,n^2+3)^3-(3\,n^3+2)^2 = \left(n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)\right)^3-\left(n^3\left(3+\frac{2}{n^3}\right)\right)^2 = \\ = n^6\left(2+\frac{3}{n^2}\right)^3-n^6\left(3+\frac{2}{n^3}\right)^2 = \\ = \underbrace{n^6}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\left[\left(2+\frac{3}{n^2}\right)^3-\left(3+\frac{2}{n^3}\right)^2\right]}_{\to(2+0)^3-(3+0)^2=-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Schließlich ist

$$\frac{\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}} = \frac{n^2\left(\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{3}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

6. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich unter Verwendung der Gaußformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\Bigg(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot(1+0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Summenformel für geometrische Summen erhält man ferner für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{7^k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{7}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{\frac{9}{7}} = \\ &= \frac{7}{9}\cdot\Bigg(1-\underbrace{\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}_{\to 0,\text{ da } \left|-\frac{2}{7}\right|<1}\Bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{9}\cdot(1-0) = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

7. Für die (hier zu betrachtenden) Parameter $z \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich hinsichtlich des Konvergenzverhaltens der Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < z < 1, \\ 1, & \text{falls } z = 1, \\ \infty, & \text{falls } 1 < z; \end{cases}$$

dies motiviert die folgenden Fallunterscheidungen bezüglich x und $y \in \mathbb{R}^+$:

a) Für $0 < x < 1$ ergibt sich zunächst

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

und mit Hilfe einer Fallunterscheidung bezüglich $y > 0$ erhält man stets

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Ohne Fallunterscheidung kann man wie folgt argumentieren: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n > 0$ und $1 + y^n > 1$ und damit

$$0 < \frac{x^n}{1+y^n} < x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

nach dem Schrankenlemma ergibt sich folglich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0;$$

damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) Für $x = 1$ ist $x^n = 1$ und damit

$$a_n = \frac{1}{1 + y^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; somit erhält man:

- Für $0 < y < 1$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

- Für $y = 1$ ist $y^n = 1$ und damit $a_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

- Für $1 < y$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\to \infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

c) Für $x > 1$ erhält man

$$a_n = \frac{x^n}{1 + y^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \frac{y^n}{x^n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \left(\frac{y}{x}\right)^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad \text{und damit} \qquad \frac{1}{x^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit erhält man:

- Für $0 < y < x$ ist $\frac{y}{x} < 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

- Für $y = x$ ist $\frac{y}{x} = 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{=1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

- Für $x < y$ ist $\frac{y}{x} > 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\to \infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

8. a) Seien $a_n = n^2$ sowie $b_n = \dfrac{1}{n}$ und damit $a_n\, b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \infty$.

b) Seien $a_n = n^2$ sowie $b_n = -\dfrac{1}{n}$ und damit $a_n\, b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = -\infty$.

c) Seien $a_n = n$ sowie $b_n = \dfrac{c}{n}$ und damit $a_n\, b_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = c$.

d) Seien $a_n = n$ sowie $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ und damit $a_n\, b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, und die Folge $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.