

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Es ist

- $a_1 = \frac{3}{3} = 1$, $a_2 = \frac{5}{4}$, $a_3 = \frac{7}{5}$, $a_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ und $a_5 = \frac{11}{7}$ sowie
- $b_1 = 1 - 1 + 1 = 1$, $b_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $b_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$,
 $b_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$ und $b_5 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{21}{25}$.

b) Die Berechnung der ersten fünf Folgenglieder unter a) legt nahe, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist; dies läßt sich auf verschiedene Weise zeigen:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$$

und damit auch

$$a_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+3};$$

wegen $n+2 < n+3$ ist $\frac{3}{n+2} > \frac{3}{n+3}$ und damit

$$a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2 - \frac{3}{n+3} = a_{n+1}.$$

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff \frac{2n+1}{n+2} < \frac{2n+3}{n+3} \iff \\ &\iff (2n+1)(n+3) < (2n+3)(n+2) \iff \\ &\iff 2n^2 + 7n + 3 < 2n^2 + 7n + 6 \iff 0 < 3 \end{aligned}$$

Da die Aussage $0 < 3$ richtig ist, ist auch die gemäß den Äquivalenzumformungen („ $\iff$ “) gleichwertige Aussage $a_n < a_{n+1}$ richtig.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+3)(n+2) - (2n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{(2n^2 + 7n + 6) - (2n^2 + 7n + 3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

und damit $a_n < a_{n+1}$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{n+3} \cdot \frac{n+2}{2n+1} = \frac{2n^2+7n+6}{2n^2+7n+3} > 1$$

und damit $a_n < a_{n+1}$; hierbei geht $a_n > 0$ ein.

Die streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist insbesondere (etwa durch $a_1 = 1$) nach unten beschränkt; des weiteren ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen

$$a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ auch nach oben beschränkt.

Wegen $b_1 = 1 < \frac{7}{4} = b_2$ und $b_2 = \frac{7}{4} > \frac{7}{9} = b_3$ ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend; genauer gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$b_{2m} = 1 + \frac{(-1)^{2m}}{2m} + \frac{1}{(2m)^2} = 1 + \frac{1}{2m} + \frac{1}{(2m)^2} > 1$$

und

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= 1 + \frac{(-1)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)^2} = 1 - \frac{2m}{(2m+1)^2} < 1, \end{aligned}$$

folglich also $b_{2m} > 1 > b_{2m+1}$ und $b_{2m+1} < 1 < b_{2m+2}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|b_n| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \leq |1| + \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| + \left| \frac{1}{n^2} \right| = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},$$

und wegen $\frac{1}{n} \leq 1$ und $\frac{1}{n^2} \leq 1$ folgt daraus $|b_n| \leq 1 + 1 + 1 = 3$; damit ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

- c) Wir zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = 2$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{(2n+1) - 2(n+2)}{n+2} \right| = \\ &= \left| \frac{-3}{n+2} \right| = \frac{3}{n+2} \leq \frac{3}{n_0} = 3 \cdot \frac{1}{n_0} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert $b = 1$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |b_n - b| &= \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| + \left| \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n} \leq 2 \cdot \frac{1}{n_0} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. a) „ $n = 10$ “:

$$10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + n = n^3 + 3n^2 + 4n \leq \\ &\leq n^3 + 3n^2 + n \cdot n \leq n^3 + 4n^2 \leq n^3 + n \cdot n^2 = 2n^3 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\end{aligned}$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt $0 \leq \frac{n^2}{2^n} < \frac{1}{n}$; wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt dann nach dem Schrankenlemma auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

c) Sei $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} = 1000$; für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt dann $\frac{n^2}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon$.

3. Für die beschränkte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen existiert eine Schranke $M > 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so gibt es eine Schranke $M^* > 0$ mit $|a_n| \leq M^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt aber

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot M^*$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich ist auch die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

b) Die konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist konvergent, und die alternierende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt; für die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt dann $a_n b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent.

c) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$$

und damit

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon;$$

damit ist auch $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

4. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r - \frac{1}{n} < r - \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad r + \frac{1}{n+1} < r + \frac{1}{n};$$

damit gibt es, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, rationale Zahlen a_n und $b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad r - \frac{1}{n+1} < a_{n+1} < r - \frac{1}{n+2}$$

und damit

$$a_n < r - \frac{1}{n+1} < a_{n+1};$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(r - \frac{1}{n} \right) = r \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(r - \frac{1}{n+1} \right) = r$$

ist nach dem Schrankenlemma auch die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad r + \frac{1}{n+2} < b_{n+1} < r + \frac{1}{n+1}$$

und damit

$$b_n > r + \frac{1}{n+1} > b_{n+1};$$

damit ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(r + \frac{1}{n+1} \right) = r \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(r + \frac{1}{n} \right) = r$$

ist nach dem Schrankenlemma auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$.