

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

37. Für den reellen Parameter $a > 0$ sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a + 1, & \text{für } x < 1, \\ ax(2 - x), & \text{für } x \geq 1, \end{cases}$$

gegeben.

- Man zeige, daß die Funktion f stetig ist.
- Man berechne die Grenzwerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$ und bestimme den Wertebereich W_f von f .
- Man zeige, daß f umkehrbar ist, und gebe die Umkehrfunktion f^{-1} von f explizit an.

38. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$.

- Man zeige, daß f stetig und streng monoton wachsend ist.
- Man bestimme den Wertebereich W_f von f .
- Man gebe die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \rightarrow \mathbb{R}$ explizit an. Ist f^{-1} stetig?

39. Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ sowie $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-a) = f(a)$.

- Man zeige, daß es ein $\xi \in [0, a]$ mit $f(\xi) = f(\xi - a)$ gibt.
- Man gebe für die Funktion $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - a^2)(x + 2a)$ ein geeignetes ξ explizit an.

40. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*). Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, stetige Funktion sowie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty.$$

Man zeige, daß die Graphen von f und g einen Schnittpunkt besitzen.

Abgabe bis Montag, den 20. Januar 2014, 10¹⁵ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).

Die erfolgreiche Teilnahme am schriftlichen Übungsbetrieb zu einer Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ aus früheren Semestern wird angerechnet; so ist für diese Studierenden die Abgabe nicht verpflichtend.