MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 9
16.12.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

33. Für die reellen Parameter λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{x^2+8}+\mu, & \text{für } x < -1, \\ (x-\lambda)(x-\mu), & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \lambda\,|x-2|+\mu & \text{für } 1 < x, \end{cases}$$

gegeben.

a) Man begründe ausführlich, daß f in allen Punkten $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ stetig ist.

b) Man bestimme alle Paare $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für die f stetig ist.

34. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2004).* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ betrachte man die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - n\,x + 1.$$

Man zeige:

a) Jede Funktion f_n besitzt genau eine Nullstelle $\xi_n \in \,]0, 1[$.

b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

35. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 - 2.$$

a) Man zeige, daß f eine stetige Funktion mit $f(0) < 0$ und $f(2) > 0$ ist, aber in $[0,2] \cap \mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt.

b) Man erläutere, warum a) nicht dem Nullstellensatz widerspricht.

36. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$. Man beweise, daß die Gleichung

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$

in den Intervallen $]a, b[$ und $]b; c[$ jeweils mindestens eine Lösung besitzt.

Abgabe bis Montag, den 13. Januar 2014, 10^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).

Die erfolgreiche Teilnahme am schriftlichen Übungsbetrieb zu einer Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ aus früheren Semestern wird angerechnet; so ist für diese Studierenden die Abgabe nicht verpflichtend.