MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 6
25.11.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

21. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).*

    a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ konvergiert.

    b) Man zeige $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

22. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die n–te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k .$$

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und gebe den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

23. a) Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}.$$

    b) Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

24. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Man zeige:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ konvergent} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

Abgabe bis Montag, den 2. Dezember 2013, 10^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).

Die erfolgreiche Teilnahme am schriftlichen Übungsbetrieb zu einer Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I" aus früheren Semestern wird angerechnet; so ist für diese Studierenden die Abgabe nicht verpflichtend.