MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 5
18.11.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

17. Man bestimme die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n + (-1)^n \cdot (3\,n+1)}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right).$$

18. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen gebe es eine Konstante $q \in [0,1[$ mit der Eigenschaft $|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

    a) Man zeige $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

    b) Man zeige $|a_{n+k} - a_n| \leq q^n \cdot \dfrac{|a_1 - a_0|}{1-q}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

    c) Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist.

19. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2002).* Sei $z \in \mathbb{Z}$. Man berechne:

    a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right)$.

    b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2}$.

    c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2k}$.

20. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

    a) Man zeige

    $$\sum_{k=0}^{n} a_k = 4 - \frac{n+3}{2^n}$$

    und

    $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, a_k = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3\,n+5}{2^n}\right)$$

    für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

    b) Man untersuche die Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ jeweils auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihre Summen.

Abgabe bis Montag, den 25. November 2013, 10^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).

Die erfolgreiche Teilnahme am schriftlichen Übungsbetrieb zu einer Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I" aus früheren Semestern wird angerechnet; so ist für diese Studierenden die Abgabe nicht verpflichtend.