MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 4
11.11.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

13. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4}, \qquad \text{mit} \quad a_0 \in [1,3]\,.$$

   a) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für alle $a_0 \in [1,3]$ monoton fallend ist.
   b) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in Abhängigkeit von a_0, falls der Grenzwert existiert.

14. Seien die reellen Zahlen α, $\beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die durch

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

   rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Man zeige für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die explizite Darstellung ihrer Folgenglieder

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   b) Man untersuche, für welche Werte von α, β und welche Startwerte a_0 die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

15. Es seien $0 < a_1 < b_1$ fest gewählt. Man betrachte die beiden über die Rekursion

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man zeige, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, und bestimme das dadurch definierte Element $r \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

16. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

   rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Man zeige, daß die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
   b) Man zeige die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bestimme ihren Grenzwert.

Abgabe bis Montag, den 18. November 2013, 10^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).

Die erfolgreiche Teilnahme am schriftlichen Übungsbetrieb zu einer Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ aus früheren Semestern wird angerechnet; so ist für diese Studierenden die Abgabe nicht verpflichtend.