

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

9. a) (*Staatsexamensaufgabe Herbst 1997*). Man berechne den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (3n + 1) \left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) (*Staatsexamensaufgabe Herbst 1996*). Man untersuche die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz, und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwert.
10. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*). Gegeben sei die durch

$$a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Man zeige $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
11. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005*). Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge.

- a) Man zeige, daß $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 1$ gilt.
- b) Man untersuche die Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.
12. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*).

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge reeller Zahlen. Man zeige, daß dann auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegen a konvergiert.

- b) Man finde eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht konvergiert, so daß die zugehörige Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- c) Sei vorausgesetzt, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wächst und daß $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Man zeige, daß dann auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Abgabe bis Montag, den 11. November 2013, 10¹⁵ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).

Die erfolgreiche Teilnahme am schriftlichen Übungsbetrieb zu einer Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ aus früheren Semestern wird angerechnet; so ist für diese Studierenden die Abgabe nicht verpflichtend.