MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 2
28.10.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

5. Man untersuche in Abhängigkeit von den Parametern $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $y \in \mathbb{R}$ die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{y^n}{1+y^{2n}}$$
auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

6. Man zeige, daß die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+6)^2 + (n+7)^2}{n^2}$$
und
$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{n^3}$$
konvergieren, und bestimme ihren Grenzwert.

7. a) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1999).* Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, und berechne ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| \leq 0{,}01$.

   b) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{\sin^3 n - 3\,\cos n}{\sqrt{n}}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, und berechne ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

8. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Man betrachte ferner die Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert durch
$$c_n = \min\{a_n, b_n\} \qquad \text{und} \qquad d_n = \max\{a_n, b_n\}.$$
Man zeige, daß die beiden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und bestimme jeweils den Grenzwert.

Abgabe bis Montag, den 4. November 2013, 10^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).