MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 1
21.10.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit
$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{bzw.} \quad b_n = \frac{n-1}{n^2+1} \quad \text{bzw.} \quad c_n = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.
   a) Man untersuche die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.
   b) Man weise jeweils anhand der Definition die Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach.

2. a) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert?
   b) Man untersuche die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{n!}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Monotonie und Konvergenz. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

3. Gegeben sei $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
   a) Man zeige mit Hilfe von vollständiger Induktion $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
   b) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, und bestimme ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (mit $n_0 \geq 2$) mit $|a_n - a| < \frac{1}{1000}$ für alle $n \geq n_0$.

4. Man betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Man beweise oder widerlege folgende Aussagen.
   a) Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
   b) Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so ist auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
   c) Ist die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
   d) Ist die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Abgabe bis Montag, den 28. Oktober 2013, 10^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).