MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Schlüchtermann

SS99
-Blatt 1-
5.5.99

Übungen zur Preisbildung von Derivaten

1. Man betrachte drei Ereignisse ($M = 3$). Es existieren zwei Arten von Kontrakten: Fremdkapital (i=1) erzielt unabhängig vom Ertrag den Zinsatz R; Eigenkapital besitzt die Renditen r_j abhängig vom Eintritt der Ereignisse $j = 1, 2, 3$. Man nehme $r_1 < r_2 < r_3$ an. Läßt diese Portfolio Arbitrage zu? Ist der Markt vollständig?

2. Entscheiden Sie, ob das folgende Preisdividendenpaar arbitragefrei ist und ob der Zustandspreisvektor eindeutig ist:
$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 9 \\ 24 \\ 57 \end{bmatrix}.$$

3. Sind die folgenden Preisdividendenpaare arbitragefrei und gibt es einen eindeutigen Zustandspreisvektor?

   a)
$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   b)
$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & -4 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

4. Beweisen Sie Proposition 1.1.3.

5. Man zeige, daß die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem endlichen Zustandsraum von m Elementen als eine konvexe Menge $P \subset \mathbb{R}^m$ dargestellt werden kann. Sei ein Vermögenswert S durch seinen Preis und sein Cash-Flow gegeben. Man zeige: Die Menge der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten von S entspricht dem Schnitt von P mit einer Hyperebene des $\mathbb{R}^m$. Man beweise analog, daß die Menge der zulässigen risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße für einen Markt mit N Vermögenswerten dem Schnitt von P mit N Hyperebenen entspricht.