MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II
SOMMERSEMESTER 2015

8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: *Determinanten*
Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 12 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix},$$

a) indem Sie sie auf die Form einer oberen Dreiecksmatrix bringen,
b) indem Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz anwenden (Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte).
c) Würden Sie hier die Regel von Sarrus anwenden? Wieso bzw. wieso nicht?
d) Berechnen Sie die Determinante des oberen linken 2×2-Blockes $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ von A mittels Summation über die Permutationen der Einträge, wie Sie sie im Beweis der Eindeutigkeit der Determinanten finden.

Aufgabe 2: *Eigenwerte und Eigenvektoren*
Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

a)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bonusaufgabe: *Kriterium für Anzahl von Eigenwerten*
Für eine $n \times n$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ über einem Körper $\mathbb{K}$ definieren wir die Spur, englisch trace, als die Summe der Diagonalelemente:

$$\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Zeigen Sie, dass die Anzahl N_A der Eigenwerte einer reellen 2×2-Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ wie folgt bestimmt werden kann:

$$N_A = \begin{cases} 2, & \text{falls } \left(\mathrm{tr}(\frac{1}{2}A)\right)^2 > \det A \\ 1, & \text{falls } \left(\mathrm{tr}(\frac{1}{2}A)\right)^2 = \det A \\ 0, & \text{falls } \left(\mathrm{tr}(\frac{1}{2}A)\right)^2 < \det A. \end{cases}$$