MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II
SOMMERSEMESTER 2015

3. TUTORIUMSBLATT

Aufgabe 1: *Lineare Abbildungen*
Sind die folgenden Abbildungen ($\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-)linear? Begründen Sie. *Hinweis:* Denken Sie auch über Wohldefiniertheit nach.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.
b) Die Ableitung: $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, $f \mapsto Df := f'$, wobei $C^1(\mathbb{R})$ die (einmal) stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind, $C^0(\mathbb{R})$ entsprechend die stetigen.
c) Auf dem vom Übungsblatt bekannten ℓ^p (über $\mathbb{C}$) für $p \in [1, \infty)$ die folgenden beiden Abbildungen:
   i) Den *Linksshiftoperator* L:
$$\begin{aligned} L : \ell^p &\to \ell^p \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto L(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_2, a_3, a_4, \dots) \end{aligned}$$
   ii) Den *Rechtsshift(pseudo)operator* R:
$$\begin{aligned} R : \ell^p &\to \ell^p \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto R(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (1, a_1, a_2, a_3, \dots) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *Untervektorräume, lineare Abbildungen*
Sind die folgenden Mengen Untervektorräume der jeweils angegebenen Obermenge? Begründen Sie.

a) Die Menge $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
b) Die Menge aller konstanten reellen Funktionen $K \subseteq C^1(\mathbb{R})$.

Tipp: Sind die Mengen vielleicht Bilder oder Kerne linearer Abbildungen?

Aufgabe 3: *Basen, lineare Abbildungen*

a) Bilden die drei Vektoren $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 4), v_3 = (3, 4, 5)$ eine Basis für den $\mathbb{R}^3$? Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3$?
b) Auf dem $\mathbb{R}^3$ definieren wir eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch ihre Wirkung auf die Standardbasis: $f(e_1) = 1, f(e_2) = 0, f(e_3) = 1$. Berechnen Sie für $v_1 = (0, 1, 4)$ und $v_2 = (9, 16, 25)$ $f(v_1)$ und $f(v_2)$. Falls möglich, ergänzen Sie $\{v_1, v_2\}$ durch v_3 zu einer Basis für $\mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $f(v_3)$.
c) Nun betrachten wir zwei lineare Abbildungen $l_1, l_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch ihre Wirkung auf die Standardbasis: $l_1(e_1) = 1, l_1(e_2) = 0, l_2(e_1) = 0, l_2(e_2) = 1$, kurz $l_i(e_j) = \delta_{ij}$ mit dem Kronecker-Delta, das Sie sicher schon aus Rechenmethoden kennen. Bilden l_1 und l_2 eine Basis für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum? Wenn ja, was könnte er sein?