

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II
SOMMERSEMESTER 2015

2. TUTORIUMSBLATT

Aufgabe 1: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Vergegenwärtigen Sie sich die Definition von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ aus der Vorlesung und betrachten Sie den Fall $m = 3$. Finden Sie alle Lösungen zu den folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$x = \bar{5} \quad (1)$$

$$x^2 = \bar{2} \quad (2)$$

$$x^2 + x + \bar{1} = \bar{0} \quad (3)$$

Aufgabe 2: Lineare Unabhängigkeit und Basis

Wir betrachten

- (1) die Menge aller reellwertigen Folgen $V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}\}$.

a) Zeigen Sie, dass V ein \mathbb{R} -Vektorraum ist.

Desweiteren definieren wir eine Teilmenge $U \subset V$ durch

$$U = \{(1, 0, 0, 0, \dots), (1, 1, 0, 0, \dots), (1, 1, 1, 0, \dots), \dots\}.$$

a) Sind die Elemente von U linear unabhängig?

b) Bilden sie eine Basis für V ?

- (2) die beiden folgenden Vektoren aus \mathbb{C}^2 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} i \\ i - 1 \end{pmatrix}$$

a) Sind v_1 und v_2 linear unabhängig, wenn man \mathbb{C}^2 als \mathbb{R} -Vektorraum versteht?

b) Sind sie es für \mathbb{C}^2 als \mathbb{C} -Vektorraum?

c) Geben Sie eine Basis für \mathbb{C}^2 als \mathbb{R} -Vektorraum an.

d) Kann man $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^2$ finden, sodass $\{v_1, v_2, u_1, \dots, u_k\}$ eine Basis für \mathbb{C}^2 (als \mathbb{R} -Vektorraum) bildet? Falls ja, was ist k ? (Und was sind u_1, \dots, u_k ?)

Aufgabe 3: Untervektorräume

Wir betrachten zwei Teilmengen des \mathbb{R}^3 :

$$U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad V = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Sind U , V , $U \cap V$, $U \cup V$ \mathbb{R} -Untervektorräume?

b) Sind U , V , $U \cap V$, $U \cup V$ Untervektorräume des \mathbb{R}^3 ?

c) Ist $U \cap V$ Untervektorraum von U ? Und von V ?