

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II
SOMMERSEMESTER 2015

1. TUTORIUMSBLATT

Aufgabe 1: Verknüpfungstafeln und Kommutativität

Zeigen Sie mit Hilfe von Verknüpfungstafeln, dass alle Gruppen mit vier Elementen kommutativ sind.

Aufgabe 2: Exponentialfunktion als Gruppenhomomorphismus

Wir untersuchen einige Eigenschaften der reellen Zahlen und der positiven reellen Zahlen, wenn sie als Gruppen aufgefasst werden.

- a) Überzeugen Sie sich, dass $G := (\mathbb{R}, +)$ sowie $H := (\mathbb{R}^+, \cdot)$ Gruppen sind, wobei $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.
- b) Verstehen Sie die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ als Abbildung zwischen Gruppen, also $\exp : G \rightarrow H$, und zeigen Sie, dass \exp ein Gruppenhomomorphismus ist.
- c) Verifizieren Sie die aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen *explizit*, insbesondere, dass
 - i) $\exp^{-1}(\{e_H\})$ (Vorsicht: hier ist das Urbild von \exp gemeint!) eine Untergruppe von G ist, und dass
 - ii) $\exp(G)$ eine Untergruppe von H ist.

Aufgabe 3: Erzeugung einer Gruppe aus Abbildungen

Sei (G, \circ) eine Gruppe und M eine Menge. Wir definieren die Menge der Abbildungen von M nach G als

$$\text{Abb}(M, G) := \{f : M \rightarrow G\}$$

und auf dieser Menge eine Verknüpfung $*$:

$$\begin{aligned} * : \quad \text{Abb}(M, G) \times \text{Abb}(M, G) &\rightarrow \text{Abb}(M, G) \\ &\quad (f, g) \quad \mapsto \quad f * g, \\ \text{wobei} \quad (f * g)(x) &:= f(x) \circ g(x). \end{aligned}$$

Weiter definieren wir ein Element f_e von $\text{Abb}(M, G)$ als $f_e(x) = e \forall x \in M$, sowie für jedes f aus $\text{Abb}(M, G)$ ein zugeordnetes Element f^{-1} (nicht die Umkehrfunktion!) als $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1} \forall x \in M$.

Zeigen Sie, dass $\text{Abb}(M, G)$ mit neutralem Element f_e und dieser Definition inverser Elemente eine Gruppe bildet.

Hinweis:

Ein paar grundlegende Tipps, falls Sie noch Probleme mit dieser Art Aufgaben haben:

- Vergewissern Sie sich, dass Sie alle nötigen Definitionen parat haben.
- Auch „offensichtliche“ Tatsachen sollen überprüft und gezeigt werden.
- Machen Sie sich bei jedem Objekt klar, „wo es lebt“ und „was es ist“ – ist es Element der Gruppe, ist es Abbildung, ist es Element der Gruppe der Abbildungen (was ist der Unterschied?) usw.