Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 23. Januar 2007, 16^{00} Uhr

Aufgabe 9.1:
Gegeben seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < b, I = [a, b]$, und $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in C^1$. Zur Lösung der Randwertaufgabe

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) \ , \ x(a) = \alpha \ , \ x(b) = \beta \ ;$$

programmieren Sie das folgende Einfachschießverfahren mit dem Sekantenverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle ζ^* von $\varphi(\zeta) \equiv x(b; \alpha, \zeta) - \beta$, d.h. $\zeta_{k+1} = \zeta_k + \Delta$ mit
$0 = \varphi(\zeta_k) \ + \ \dfrac{\varphi(\zeta_k) - \varphi(\zeta_{k-1})}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} \ \Delta.$

Zur Bestimmung der Näherungslösung $x_h(\cdot\,; \alpha, \zeta)$ für die Lösung $x(\cdot\,; \alpha, \zeta)$ der AWA

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) \ , \ x(a) = \alpha \ , \ x'(a) = \zeta \ ;$$

verwenden Sie ein Verfahren Ihrer Wahl, z.B. das Standard–Runge–Kutta–Verfahren von Aufgabe 4.3, und ersetzen φ durch $\varphi(\zeta) := x_h(b; \alpha, \zeta) - \beta$.
Testen Sie Ihr Programm an einem selbst gewählten Testbeispiel (mit kurzer Dokumentation).
Berechnen und zeichnen Sie die Lösung der Randwertaufgaben

(a) $-x''(t) + x(t) = 2sin(t) \ , \ 0 < t < 1 \ ; \ x(0) = 0 \ , \ x(1) = 0 \ ;$

(b) $-x''(t) + sin(t)x'(t) + x(t) = 1 - |t - 1/2| \ , \ 0 < t < 1 \ ; \ x(0) = 0 \ , \ x(1) = 0 \ ;$

(c) $x''(t) + x'(t)^2 - x(t) = 1 \ , \ 0 < t < 1 \ ; \ x(0) = 0 \ , \ x(1) = 1 \ ;$

(d) $2x(t)x''(t) + x'(t)^2 - 2x(t) = 0 \ , \ 0 < t < 1 \ ; \ x(0) = 1 \ , \ x(1) = 2 \ ;$ (in diesem Beispiel sind die üblichen Voraussetzungen über f nicht ganz erfüllt).

Als Startwerte für das Sekantenverfahren kann in allen vier Beispielen immer $\zeta_1 = 0$ und $\zeta_2 = 1$ genommen werden. Verwenden Sie für das Sekantenverfahren als

$$\textit{Abbruchkriterium :} \qquad \textit{es gilt} \ \ \big(\, |\zeta_k - \zeta_{k-1}| < TOL \quad \text{oder} \quad |\varphi(\zeta_k)| < TOL \, \big)$$

mit $TOL = 10^{-10}$.

Aufgabe 9.2:
Sei $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige koerzitive Bilinearform auf dem Hilbertraum V. Sei $V_h \subset V, h \in \mathcal{H}$, eine Familie von endlichdimensionalen Teilräumen von V, und $a_h : V_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilearform auf V_h für $h \in \mathcal{H}$ mit

$$a_h(v_h, v_h) \geq \underline{c}\|v_h\|_V^2, v_h \in V_h \ , \ h \in \mathcal{H} \ .$$

Zu $f \in V'$, $f(v) \equiv:< f, v >$, sei $u \in V$ die Lösung von $a(u,v) =< f, v > \quad, \; v \in V$. Zu $f_h \in {V_h}'$, $f_h(v) \equiv:< f_h, v >$, sei $u_h \in V_h$ die Lösung von $a_h(u_h, v_h) =< f_h, v_h > \quad, \; v_h \in V_h$. Man zeige, daß $c > 0$ existiert mit

$$\|u - u_h\|_V \;\leq\; c\left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|< f, w_h > - < f_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} \right).$$

Aufgabe 9.3:

Sei $K = \triangle(a^1, a^2, a^3) \subset \mathbb{R}^2$, $a^{ij} := \dfrac{a^i + a^j}{2}$ für $1 \leq i < j \leq 3$. Genügt $p \in \mathbb{P}_6$ den Bedingungen

$$D^\alpha p(a^i) = 0\,, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2\,, \quad 1 \leq i \leq 3$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial n}(a^{ij}) = 0\,, \quad 1 \leq i < j \leq 3\,,$$

so ist p das Nullpolynom. Dabei ist $n(a^{ij})$ die äußere Normale an K im Randpunkt a^{ij}.

Aufgabe 9.4:

Zeigen Sie für das Argyris–Element die globale C^1–Stetigkeit der resultierenden Ansatzfunktionen auf $\overline{G} = \bigcup_{\triangle \in T_h} \triangle$.