

Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 16. Januar 2007, 16⁰⁰ Uhr

Aufgabe 8.1:

Sei $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige symmetrische Bilinearform auf dem Hilbertraum V . a sei koerzitiv auf dem abgeschlossenen Unterraum V_0 von V , $a(v, v) \geq \underline{c} < v, v >_V$, $v \in V_0$. Zu $f \in V'$ sei $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle$.

(a) Durch quadratische Ergänzung zeige man, daß J auf V_0 nach unten beschränkt ist durch $-\frac{1}{2\underline{c}}\|f\|^2$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Parallelogramm-Identität (für a), daß jede Folge (v_k) , $v_k \in V_0$, mit $\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = \inf_{v \in V_0} J(v)$ Cauchyfolge ist.

(c) Folgern Sie, daß es genau ein $v^* \in V_0$ gibt mit $J(v^*) = \min_{v \in V_0} J(v)$.

Aufgabe 8.2:

Zeigen Sie, daß für v^* aus (8.1)(c) gilt

$$a(v^*, v) = \langle f, v \rangle, \quad v \in V_0.$$

Aufgabe 8.3:

Berechnen Sie zu $\Sigma = \{\sigma_{(0,0)}, \sigma_{(1/2,0)}, \sigma_{(1,0)}, \sigma_{(1/2,1/2)}, \sigma_{(0,1)}, \sigma_{(0,1/2)}\} \subset \mathbb{P}_3'$, $\sigma_x(v) := v(x)$ für $v \in \mathbb{P}_3$ und $x \in \mathbb{R}^2$, die lokalen Lagrange-Basispolynome aus $\mathbb{P}_3$ zu $\sigma_{(0,0)}, \sigma_{(1,0)}, \sigma_{(0,1)}$, und zu $\sigma_{(1/2,1/2)}$.

Aufgabe 8.4:

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ glatt berandetes beschränktes Gebiet und $V_0 := \{v \in W^{1,2}(G) : \int_G v(x) dx = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) Zu $f \in L_2(G)$ gibt es genau ein $v^* \in V_0$ mit

$$\sum_{i=1}^d \int_G \left(\frac{\partial v^*}{\partial x_i} \right)(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)(x) dx = \int_G f(x) v(x) dx, \quad v \in V_0.$$

(b) Gilt in (a) zusätzlich $v^* \in C^2(G) \cap W^{2,2}(G) \cap C^1(\overline{G})$ und $f \in C^0(G)$, so folgt

$$-\Delta v^*(x) = f(x), \quad x \in G; \quad \frac{\partial v^*}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \text{Rd } G.$$