Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 19. Dezember 2006, 16^{00} Uhr

Aufgabe 7.1:
Sei S der lineare Spline, der die Funktion x in den äquidistanten Knoten mit Knotenabstand $h > 0$ interpoliert. Für $x \in C^2(I)$ zeige man

$$\|x' - S'\|_{L_2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x''\|_{L_2(I)} \cdot h \quad , \quad \|x - S\|_{L_2(I)} \leq \frac{1}{4} \|x''\|_{L_2(I)} \cdot h^2$$

Aufgabe 7.2:
(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ und zugehörigen Eigenfunktionen der Randeigenwertaufgabe

$$-x''(t) = \lambda x(t) \ , \ 0 < t < 1 \ ;$$

$$x(0) = 0 \ , \ x(1) = 0 \ .$$

(b) Zeigen Sie für die RWA

$$-x''(t) + q(t)x(t) = f(t) \ , \ 0 < t < 1 \ ;$$

$$x(0) = \alpha \ , \ x(1) = \beta \ .$$

mit $q \in C([0,1])$, $\min\limits_{t \in [0,1]} q(t) > -\pi^2$ die Koerzitivität der zugehörigen Bilinearform auf $PC_0^1\big([0,1]\big)$, dem Raum der in $[0,1]$ stetigen und dort stückweise stetig differenzierbaren Funktionen x mit $x(0) = 0$, $x(1) = 0$.

Aufgabe 7.3:
Sei $P \subset C^m(\mathbb{R}^d)$ Teilraum, $T_h = \{\triangle\}$ Triangulierung des beschränkten Gebietes G, und

$$V_h := \{v : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R} : \quad v \Big|_{\overset{o}{K}} \in P \ \text{ für } \ \triangle \in T_h \ ; \ v \in C^{m-1}(\overline{G}) \ \} \ .$$

Zeigen Sie, daß es für $v \in V_h$ zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_0 : |\alpha| \leq m$ ein $v_\alpha \in L_p(G)$ gibt mit

$$\int_G v(x) D^\alpha \varphi(x) dx \ = \ (-1)^{|\alpha|} \int_G v_\alpha(x) \varphi(x) dx \ , \ \varphi \in C_0^\infty(G)$$

Aufgabe 7.4*:
Bestimmen Sie die Dimension von $span\big(\{x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 < k\}\big)$ und $span\big(\{x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq \max(\alpha_1, \alpha_2) < k\}\big)$.