

Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 12. Dezember 2006, vor der jeweiligen Übungsstunde

Aufgabe 6.1:

Zum Nachweis, daß alle Lösungen eines linearen Mehrschrittverfahrens der Form

$$\sum_{k=0}^m a_k x_{j+k} = h \sum_{k=0}^m b_k f(t_{j+k}, x_{j+k}) \quad , \quad j = 0, 1, \dots ;$$

(mit $t_i = t_0 + ih$, $x_i \equiv x_h(t_i)$ und gegebenen $a_k, b_k \in \mathbb{C}, k = 0, \dots, m$) für $f \equiv 0$ beschränkt bleiben genau dann, wenn alle Nullstellen des Polynoms $\varrho(z) := \sum_{k=0}^m a_k z^k$ im Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ liegen, und alle Nullstellen auf dem Rand des Einheitskreises einfach sind, zeige man

- (a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von ϱ , so ist $x_i := \lambda^i, i \in \mathbb{N}_0$, Lösung von $\sum_{k=0}^m a_k x_{j+k} = 0, j \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ k -fache Nullstelle von ϱ , so sind auch

$$x_i := i(i-1) \cdot \dots \cdot (i-l+1) \lambda^{i-l}, i \in \mathbb{N}_0 ;$$

für $1 \leq l \leq k-1$ Lösungen von $\sum_{k=0}^m a_k x_{j+k} = 0, j \in \mathbb{N}_0$.

- (c) Wie erhält man bei reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, m$, eine reelle Lösungsbasis?
- (d) Man weise obiges Beschränktheitskriterium nach.
- (e) Erfüllt die Mittelpunktsformel (1.7) dieses Stabilitätskriterium.

Aufgabe 6.2:

Zeigen Sie die Aussagen des Hilfssatzes (2.2.12): Sei $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{s-1} < \alpha_s \leq 1$ gegeben.

- (a) Jedes $X \in \mathbb{P}_{s+1}^n$ ist eindeutig bestimmt durch die $s+1$ Werte

$$X(t_0) = x_0, \quad X'(t_0 + \alpha_i h) = k_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

- (b) Sei $l_j \in \mathbb{P}_s : l_j(\alpha_i) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq s$. Dann gilt mit $l_j^{(-1)}(t) := \int_0^t l_j(s) ds$, daß

$$X(t) := x_0 + h \sum_{j=1}^s k_j l_j^{(-1)}\left(\frac{t-t_0}{h}\right)$$

die Interpolationsaufgabe in (a) löst.

- (c) Für $\beta_{ij} := \int_0^{\alpha_i} l_j(s) ds, 1 \leq i, j \leq s$, und $\gamma_i := \int_0^1 l_i(s) ds, 1 \leq i \leq s$, und die RK-Näherung x_1 zu $\frac{\alpha}{\gamma^t}$, ausgehend von t_0, x_0 und $h > 0$, zeige man: Ist $X \in \mathbb{P}_{s+1}^n$ Kollokationslösung, so gilt $X(t_0 + h) = x_1$.

b.w.

(d) Wählt man $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{s-1} < \alpha_s < 1$ als Nullstellen des Orthogonalpolynoms vom Grad s bezüglich dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$, so gilt für jedes $X \in \mathbb{P}_{2s}^n$

$$\int_0^1 X(s)ds = \sum_{i=1}^s \gamma_i X(\alpha_i) .$$

Aufgabe 6.3: (Abgabe bis 9.1.2007)

Erstellen Sie für das DORMAND–PRINCE– 5(4)– Paar ein MATLAB– Programm zur automatischen Schrittweitensteuerung zur Toleranz $TOL = 10^{-10}$.

Verwenden Sie zur Bestimmung der 'optimalen' Schrittweite (zur Vereinheitlichung der Ergebnisse) die Formel $h_* = \beta \cdot h_{\text{aktuell}} \left(\frac{TOL}{\max(10^{-99}, \|est\|)} \right)^{1/(p+1)}$, $\beta = 0.9$, $p = 5$; (ohne sonstige 'Sicherheitsmaßnahmen'). Wählen Sie als Startschrittweite in allen Beispielen $h_{\text{start}} = (b - a)/100$.

Geben Sie die minimal und die maximal verwendete Schrittweite sowie die Anzahl der erfolgreich durchgeführten und die Anzahl der verworfenen RK–Schritte aus. Plotten Sie jeweils in einer Figur die Näherungen und die Schrittweitenfunktion. Es sollen folgende Beispiele durchgeführt werden:

Beispiel 1: eindimensionales Testproblem

$$x' = -\alpha x^2;$$

$$[a, b] = [-2, +2], \quad x(-2) = 1/(2\alpha + 1), \quad \alpha = 200 .$$

Beispiel 2: Logistische Gleichung (erweitertes Räuber–Beute–Modell):

$$y' = y(d_1 - \beta z - \alpha_1 y) \quad , \quad z' = z(-d_2 + \rho y - \alpha_2 z)$$

mit den Modellkonstanten $d_1 = d_2 = \rho = 1$, $\beta = 2$, den Abnahmeraten $\alpha_1 = l$, $\alpha_2 = 3 * l$, $l = \tilde{l} * 10^{-3}$, $\tilde{l} = 0, 5, 10, 50, 100$,

$$[a, b] = [0, 100], \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 1 .$$

Beispiel 3: Satellitenbahn im Erde–Mond–System als eingeschränktes Dreikörperproblem:

$$u'' = u + 2v' - (1 - \mu) \frac{u + \mu}{((u + \mu)^2 + v^2)^{3/2}} - \mu \frac{u - (1 - \mu)}{((u - (1 - \mu))^2 + v^2)^{3/2}},$$

$$v'' = v - 2u' - (1 - \mu) \frac{v}{((u + \mu)^2 + v^2)^{3/2}} - \mu \frac{v}{((u - (1 - \mu))^2 + v^2)^{3/2}} .$$

$$[a, b] = [0, 6.19], \quad \mu = 1/82.45, \quad u(0) = 1.2, \quad v(0) = u'(0) = 0, \quad v'(0) = -1.04935750983.$$