Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 5. Dezember 2006, vor der jeweiligen Übungsstunde

Aufgabe 5.1:

(a) Ein lineares Mehrschrittverfahren der Form ($t_i = t_0 + ih$, $x_i \equiv x_h(t_i)$)

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x_{j+k} = h \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{j+k}, x_{j+k}) \quad , \quad j = 0, 1, \cdots \; ;$$

(mit einer Anlaufrechnung der Ordnung p) hat für $f \in C^p$ die maximale Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=0}^{m} a_k q(k) - \sum_{k=0}^{m} b_k q'(k) = 0 \quad , \quad q \in \mathbb{P}_{p+1} \; (\text{ d.h. } \; deg\; q \leq p \;);$$

und es ein $q \in \mathbb{P}_{p+2}$ gibt mit

$$\sum_{k=0}^{m} a_k q(k) - \sum_{k=0}^{m} b_k q'(k) \neq 0 .$$

(b) Man folgere die Ordnung der Mittelpunktsformel (1.7).

Aufgabe 5.2:

Leiten Sie das Butcher-Array des 2-stufigen Gauß–Runge–Kutta–Verfahrens (2.1.3)(b) her.

Aufgabe 5.3:

Zeichnen Sie den Rand des Stabilitätsbereichs des Runge–Kutta–Verfahrens 5. Ordnung des Dormand–Prince–5(4)–Paares im Rechteck $-4.7 \leq Re\; z \leq 1.4$, $0 \leq Im\; z \leq 4.5$.

Warum ist der Stabilitätsbereich symmetrisch zur reellen Achse?