Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 28. November 2006, vor der jeweiligen Übungsstunde

Aufgabe 4.1:
Sei $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aus $Lip(L)$. Zeigen Sie, daß das Einzelschrittverfahren

$$k_i^{(r)} := f\big(t + \alpha_i h, y \;+\; h\; (\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j^{(r)} + \sum_{j=i}^{s} \beta_{ij} k_l^{(r-1)})\big) \;,\; i = 1, ..., s \;;\; r = 1, 2, ...$$

zur iterativen Bestimmung von $k_i(t, y, h), 1 \le i \le s$, für beliebiges $k_i^{(0)}, 1 \le i \le s$, konvergiert, falls

$$hL \max_{1 \le i \le s} \sum_{j=1}^{s} |\beta_{ij}| \;<\; 1$$

gilt.

Aufgabe 4.2:
Zur Konstruktion eingebetteter expliziter Runge–Kutta–Formeln zeige man die folgenden Aussagen. Dabei sei x die Lösung der AWA $\;x'(t) = f(t, x(t))\;,\; t \in I = [0, T]\;,\; x(0) = x_0$.

(a) Sei $f \in C^m(I \times \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß mit $(t, z) = (t, x(t))$ und $h > 0$ in der Entwicklung

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \sum_{j=1}^{m} \frac{x^{(j)}(t)}{j!} h^{j-1} + O\big(\|x^{(m+1)}\|_{\infty, I} h^m\big)$$

gilt

$$x'(t) = f(t, z) \quad , \quad x''(t) = \big(f_t + f_x f\big)(t, z) \;,$$
$$x'''(t) = \big(f_{tt} + 2 f_{tx} f + f_{xx} f^2 + f_t f_x + f_x{}^2 f\big)(t, z) \;.$$

(b) Sei $(t, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ und $h > 0$. Für das 'eingebettete Formelpaar' der Stufe $\widetilde{s} = 2$ (d.h. $\widetilde{\gamma}_3 = 0$) und $s = 3$

$$\begin{array}{r|ccc}
\alpha_1 = 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2 & \beta_{21} & 0 & 0 \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \\
\hline
\widetilde{x}_1 & \widetilde{\gamma}_1 & \widetilde{\gamma}_2 & 0 \\
\hline
x_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3
\end{array}$$

mit $\sum_{l=1}^{j-1} \beta_{jl} = \alpha_j \;,\; j = 2, 3$, sind für die Konsistenzordnung 2 äquivalent die Bedingungen

$$\sum_j \overline{\gamma}_j = 1 \;,\; \sum_j \overline{\gamma}_j \alpha_j = 1/2 \;,$$

b.w.

für $\overline{\gamma}^{\,t} = [\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, 0]$ und $\overline{\gamma}^{\,t} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$.

(c) Äquivalent zur Konsistenzordnung $p = 3$ sind die Gleichungen aus (b) für $\overline{\gamma}^{\,t} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$, und zusätzlich

$$\sum_j \gamma_j \sum_{l<j} \beta_{jl}\alpha_l = 1/6 \ , \quad \sum_j \gamma_j {\alpha_j}^2 = 1/3 \ .$$

(d) Geben Sie das Butcher–Array (b) für das eingebetttete Paar an für die Parameter $\alpha_2 = 1/2$ und $\alpha_3 = 1$.

Aufgabe 4.3:
Berechnen Sie, etwa mit MATLAB, die zeitliche Entwicklung einer Räuber–Beute–Population (vgl. Beispiel (1.2))

$$(a) \qquad y' = y\,(d_1 - \beta z) \quad , \quad z' = z\,(-d_2 + \rho y)$$

und mit sozio–ökonomischen Abnahmeraten

$$(b) \qquad y' = y\,(d_1 - \beta z - \alpha_1 y) \quad , \quad z' = z\,(-d_2 + \rho y - \alpha_2 z)$$

mit dem Standard–Runge–Kutta–Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

.

Schreiben Sie ein Unterprogramm, das die Anfangswertaufgabe auf dem Intervall [0,T] löst mit einer äquidistanten Schrittweite $h = T/N$. Für die Anfangswerte $y(0) = 3$, $z(0) = 1$ stellen Sie in (a) für die Modellkonstanten $d_1 = d_2 = \rho = 1$, $\beta = 2$, die Endzeit $T = 20$ und den Diskretisierungsparameter $N = 1000$ sowohl die Lösungskurven $t \to y(t)$, $t \to z(t)$ in der y/z–t–Ebene als auch die Bahn $t \to \big((y(t), z(t)\big)$ in der y–z–Ebene dar.

Verwenden Sie in (b) die Modellkonstanten $d_1 = d_2 = \rho = 1$, $\beta = 2$ wie in (a) , die Abnahmeraten $\alpha_1 = 0.015$, $\alpha_2 = 0.03$, die Endzeit $T = 100$, und den Diskretisierungsparameter $N = 10000$. Stellen Sie die Lösungskurven und die Phasenbahn wie in (a) dar.

Wie sehen die Lösungskurven der isolierten Beute–Population ($\beta = 0$ in (b)) aus für $y(0) > d_1/\alpha_1$ und für $d_1/\alpha_1 > y(0) > 0$.

Sprechstunde: Donnerstag , 14.15 Uhr - 15.15 Uhr , Zimmer 332 , Block B.