Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 21. November 2006, vor der jeweiligen Übungsstunde

Aufgabe 3.1:

(a) Für die expliziten Runge–Kutta–Verfahren, deren Konsistenzordnung p gleich der Stufenzahl s ist, ist der Bereich der absoluten Stabilität unabhängig vom speziellen Verfahren.

(b) Es gibt keine konsistenten expliziten Runge–Kutta–Verfahren, die absolut stabil sind.

Aufgabe 3.2:

(a) Sei

$$A_n = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \; .$$

Zeigen Sie, daß

$$u_k := \left[\sin\left((\frac{k\pi}{n+1})j\right) \mid 1 \le j \le n\right] \in \mathbb{R}^n \quad , \quad 1 \le k \le n$$

Eigenvektoren von A_n sind.

(b) Bestimmen Sie die asymptotische Steifheitsrate $\kappa(A_n)$, d.h. berechnen Sie mit den Eigenwerten $\lambda_i, 1 \le i \le n$, von A_n, und $\Delta s = 1/(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta s)^2 \, \frac{\max_i \mid \lambda_i \mid}{\min_i \mid \lambda_i \mid} \; .$$

Aufgabe 3.3:

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1 \le ... \le \lambda_n \le 0$. Zeigen Sie für $f(x) = Qx$, daß die kleinste Lipschitzkonstante von f bezüglich der euklidischen Norm gerade $L = |\lambda_1|$ ist, daß die kleinste einseitige Lipschitzkonstante von f aber λ_n ist.

Aufgabe 3.4:

Zeigen Sie für ein Runge–Kutta–Verfahren mit Butcher-Array $\begin{array}{c|c} \alpha & B \\ \hline & \gamma^t \end{array}$ für den Übergang von t_0, x_0 zu $t_1 = t_0 + h, x_1$ die Äquivalenz zur folgenden 'integrierten Form':

$$X_i = x_0 + h \sum_{l=1}^{s} \beta_{ij} f(t_0 + \alpha_j h, X_j) \;,\; 1 \le i \le s;$$

$$x_1 = x_0 + h \sum_{i=1}^{s} \gamma_i f(t_0 + \alpha_i h, X_i) \; .$$

Sprechstunde: Donnerstag , 14.15 Uhr - 15.15 Uhr , Zimmer 332 , Block B.