Übungen zur Numerischen Mathematik II

Abgabetermin: Dienstag, 14. November 2006, vor der jeweiligen Übungsstunde

Aufgabe 2.1:
Zeigen Sie, daß die verbesserte Polygonzugmethode (2.1.1) für $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n)$ die Konvergenzordnung 2 hat.

Aufgabe 2.2:
Sei $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß für ein explizites Runge–Kutta–Verfahren s–ter Stufe mit Butcher-Array

$$\begin{array}{r|cccc} \alpha_1 = 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_s & \beta_{s1} & \cdots & \beta_{s,s-1} & 0 \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{s-1} & \gamma_s \end{array}$$

die Bedingungen $\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} = \alpha_i$, $2 \le i \le s$; hinreichend sind für die Beziehungen

$$k_i(t, x(t)) = x'(t + \alpha_i h) + O\big(|h|^2\big) \ , \ 1 \le i \le s \ ; \ h \longrightarrow 0 \ .$$

Dabei ist x die Lösung der Anfangswertaufgabe $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

Aufgabe 2.3:
Sei $f_h \in Lip(\widetilde{L})$ bezüglich der 2. und 4. Variablen, und $h\widetilde{L} < 1/2$. Zeigen Sie, daß mit $\widetilde{x}(t+h) = x(t) + hf_h(t, x(t), t+h, \widetilde{x}(t+h))$ der folgende Fehler pro Schritt $e_h(t) := \widetilde{x}(t+h) - x(t+h)$ und der Konsistenzfehler $\tau_h(t)$ wie folgt zusammenhängen:

$$\frac{2}{3}\|h\tau_h(t)\| \le \|e_h(t)\| \le 2\|h\tau_h(t)\| \ .$$

Aufgabe 2.4:
Führen Sie die Beweisskizze von Satz **(2.2.4)** aus: Jedes s–stufige Runge–Kutta–Verfahren mit dem Butcher-Array

$$\begin{array}{c|c} \alpha & B \\ \hline & \gamma^t \end{array}$$

hat die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \det(E - zB + z\mathbb{1}\gamma^t) / \det(E - zB).$$

Dabei ist $E \in \mathbb{R}^{s\times s}$ die Einheitsmatrix, $\mathbb{1} := [1 \cdots 1]^t \in \mathbb{R}^s$, und $E - zB$ invertierbar vorausgesetzt.

Sprechstunde: Donnerstag , 14.15 Uhr - 15.15 Uhr , Zimmer 332 , Block B.