Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Nachklausur
24.03.2014

Nachklausur zur “Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen”

1. (a) (*1 Punkt*) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Fubini.

(b) (*3 Punkte*) Gegeben sei ein σ-endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$. Beweisen Sie:

$$2\int_{\mathbb{R}^+} x\mu([x,\infty[)\,dx = \int_{\mathbb{R}^+} x^2\,\mu(dx).$$

2. (a) (*1 Punkt*) Gegeben sei eine glatte Abbildung $f : U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie eine glatte p-Form $\omega \in \mathcal{D}^p(V)$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Definieren Sie den Rückzug $f^*\omega$.

(b) (*3 Punkte*) Gegeben sei die Standardvolumenform $\lambda_3 = dx \wedge dy \wedge dz$ auf $\mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = (x, y, 0)$. Berechnen Sie den Rückzug $f^*\omega$ der Form

$$\omega = i_V\lambda_3$$

unter der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto (s\cos t, s\sin t, s).$$

Stellen Sie das Ergebnis in der Form $f^*\omega_{(s,t)} = g(s,t)\,ds \wedge dt$ dar.

3. (a) (*1 Punkt*) Formulieren Sie den Satz von der monotonen Konvergenz.
Hinweis: Gemeint ist die Version für Integrale aus der Maßtheorie, nicht der gleichnamige Spezialfall für Reihen aus der Analysis 1.

(b) (*3 Punkte*) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1-e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx = \sqrt{2\pi}\,\zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

wobei

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s > 1$$

die sogenannte Riemannsche Zetafunktion bezeichnet.
Hinweis: Entwickeln Sie $1/(1-e^{-\frac{x^2}{2}})$ in eine geometrische Reihe.
Wenn Sie bei der Rechnung Integral und Reihe vertauschen, begründen Sie dies sorgfältig.

4. (a) (*1 Punkt*) Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

(b) (*1 Punkt*) Welchen Wert besitzt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}e^{-x^2/2}\,dx$$

für $k \in \mathbb{R}$? Die Angabe des Werts genügt; eine Begründung dafür ist *nicht* verlangt.

(c) (*3 Punkte*) Zeigen Sie, dass der Limes

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^3}{3a}-\frac{x^2}{2}+ikx\right)\,dx$$

für gegebenes $k\in\mathbb{R}$ mit dem in Teilaufgabe (b) angegebenen Integral übereinstimmt. Begründen Sie dabei sorgfältig die Vertauschung von Integral und Limes.

5. (a) (*1 Punkt*) Formulieren Sie den Satz von Gauß. Gemeint ist der Integralsatz von Gauß als Spezialfall des Satzes von Stokes.

(b) (*3 Punkte*) Gegeben seien das Vektorfeld $V:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$, $V(x)=\|x\|_2^{-3}x$, ein Punkt $a\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, ein Radius r mit $0<r<\|a\|_2$ und die Sphäre $S=\{x\in\mathbb{R}^3|\ \|x-a\|_2=r\}$, versehen mit einer Orientierung Ihrer Wahl. Berechnen Sie den Fluss $\int_S i_V\lambda_3$ von V durch S.

6. (a) (*3 Punkte*) Es bezeichne für integrierbare $h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$\mathcal{F}h:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad \mathcal{F}h(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ikx}h(x)\,dx$$

die Fouriertransformierte von h.

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}1_{\mathbb{R}^+}(x)$. Geben Sie eine integrierbare Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $\mathcal{F}g=(\mathcal{F}f)^2$ explizit an. Das Ergebnis für $g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, darf kein Integral enthalten.

(b) (*1 Punkt*) Formulieren Sie die Fourier-Umkehrformel, inklusive ihrer Voraussetzungen.

(c) (*1 Punkt*) Berechnen Sie den Wert $\mathcal{F}\mathcal{F}g(x)$ der iterierten Fouriertransformierten für die Funktion g aus Teilaufgabe (a) und $x\in\mathbb{R}$.