Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Klausur
19.02.2014

Klausur zur "Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen"

1. (a) (*1 Punkt*) Formulieren Sie eine Version der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale.

(b) (*3 Punkte*) Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (e^{2x+y}, e^{x+y}).$$

Berechnen Sie eine Dichte $\frac{df[\lambda_2]}{d\lambda_2}$ des Bildmaßes $f[\lambda_2]$. Hierbei bezeichnet λ_2 das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
Hinweis: Beachten Sie, dass f nicht surjektiv ist. Verwechseln Sie nicht f mit f^{-1}!

2. (a) (*1 Punkt*) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$. Weiter sei $\phi : U \to \phi[U] = M$ eine glatte bijektive Parametrisierung, definiert auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Definieren Sie das Oberflächenmaß ω_M auf $(M, \mathcal{B}(M))$. Dabei soll $\mathbb{R}^m$ mit dem Standardskalarprodukt versehen werden.

(b) (*3 Punkte*) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\omega_M(M)$ der Schraubenfläche

$$M = \{(r \cos t, r \sin t, t) | \ 0 < t < 2\pi, \ 0 < r < R\}$$

für gegebenes $R > 0$.

3. (a) (*1 Punkt*) Formulieren Sie *entweder* den Satz von der dominierten Konvergenz *oder* den Satz von Lebesgue zur Vertauschung von Integral und Ableitung.

(b) (*3 Punkte*) Die Funktion

$$\mathrm{Ai} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \omega \exp\left(-\frac{t^3}{3} + ix\omega t\right) dt$$

mit der Abkürzung $\omega := e^{i\pi/6}$ wird *Airy-Funktion* genannt. Zeigen Sie, dass sie die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\mathrm{Ai}''(x) = x \,\mathrm{Ai}(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Achten Sie dabei sorgfältig auf die Begründung von Vertauschungen von Integral und Ableitung.

4. (a) (*2 Punkte*) Gegeben sei die durch

$$\omega_{(x,y,z)} := \frac{x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

definierte 2-Form $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Berechnen Sie $d\omega$.

(b) (*1 Punkt*) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Stokes, inklusive der Voraussetzungen.

(c) (*1 Punkt*) Beweisen Sie: Es gibt *keine* glatte 1-Form $\eta \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $d\eta = \omega$.
Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_{S^2} \omega$, wobei S^2 mit einer beliebigen Orientierung versehen sei.

5. (a) (*1 Punkt*) Formulieren Sie das Lemma von Fatou.
Hinweis: Gemeint ist das allgemeine Lemma von Fatou aus der Maßtheorie, nicht der Spezialfall für Reihen aus der Analysis 1.

(b) *(3 Punkte)* Gegeben seien $p \in [1, \infty[$, ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in M(\Omega, \mathcal{A})$ und eine weitere Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) $\forall \omega \in \Omega : \; f_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\omega)$,

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n 1_{\{|f_n|>m\}}\|_p \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweisen Sie:

$$\|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. (a) (*1 Punkt*) Gegeben sei ein von unten σ-stetiger Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω. Definieren Sie das zugehörige äußere Maß μ^*.

(b) Gegeben seien eine Menge Ω und eine Funktion $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\nu(\emptyset) = 0$.

(ii) Für alle $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \subseteq B$ gelte $\nu(A) \le \nu(B)$.

(iii) *σ-Subadditivität*: Für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $A_n \subseteq \Omega$ gelte:

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Weiter sei

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | \; \forall C \in \mathcal{P}(\Omega) : \; \nu(C) \ge \nu(A \cap C) + \nu(A^c \cap C)\},$$

wobei $A^c := \Omega \setminus A$. Zeigen Sie:

(b1) *(1 Punkt)* Für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(b2) *(2 Punkte)* Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Ideen aus dem Beweis des Fortsetzungssatzes von Carathéodory.