Zusammenstellung alter Klausuraufgaben Prof. F. Merkl

(keine Abgabe, keine Korrektur, keine Lösungsvorschläge) 16. Januar 2014

Zu Ihrer Information und um Ihnen zusätzliches Übungsmaterial bereit zu stellen, sind hier die Aufgaben mehrerer Klausuren zu meiner früheren Vorlesung zur Analysis 3 zusammengestellt. Beachten Sie aber, dass die gegenwärtige Vorlesung teilweise anderen Stoff als die frühere Vorlesung behandelt, so dass nicht alle Aufgaben nur mit Kenntnis des gegenwärtigen Stoffs gelöst werden können.

1. (a) Formulieren Sie den Satz von Lebesgue von der dominierten Konvergenz.

   (b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2 - \exp(ix/n)\right)\, dx$$

2. (a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Fubini.

   (b) Berechnen Sie das Lebesguemaß der Menge

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 0 < z < x^2 e^{-2x^2+2xy-y^2}\right\}$$

3. Sei μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Wir definieren

$$f: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2}\,\mu(dy)$$

   Zeigen Sie, dass $f(x)\to 0$ für $x\to\infty$.

4. (a) Formulieren Sie eine Version der Hölderschen Ungleichung.

   (b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass für $r > p \geq 1$ die Abbildung

$$j: \quad \mathcal{L}^r(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to \mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu), \quad j(f) = f$$

   stetig ist, wenn wir $\mathcal{L}^r$ mit der Seminorm $\|\cdot\|_r$ und $\mathcal{L}^p$ mit der Seminorm $\|\cdot\|_p$ versehen.

5. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\forall x \in \Omega$: $f(x) > 0$. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega f \, d\mu > 0$$

Beachten Sie, dass *strikte* Positivität zu zeigen ist.

6. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^3} x_3^2 e^{-\|x\|_2} \lambda_3(\, dx),$$

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$.

7. Seien $a, b > 0$. Finden Sie $c > 0$ und $q > 0$, sodass gilt:

$$\sqrt{n} c^n \int_0^1 x^{an} (1-x)^{bn} \, dx \to q \qquad \text{für } n \to \infty.$$

(Mit Beweis!)

8. Sei $I \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Borelmenge und μ ein endliches Maß auf $(I, \mathcal{B}(I))$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(s) = \int_I e^{sz} \, \mu(dz)$$

differenzierbar ist.

9. (a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Stokes.

   (b) Berechnen Sie den Fluss $\Phi(\operatorname{rot} V, \pi) = \int_\pi i_{\operatorname{rot} V}(dx \wedge dy \wedge dz)$ für das Vektorfeld

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + e^z \\ zx \\ \cos z \end{pmatrix}$$

   durch die parametrisierte Fläche

$$\pi : \quad \{u \in \mathbb{R}^2 | \; \|u\|_2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3, \quad \pi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \exp(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

10. Berechnen Sie die Oberfläche des Hyperboloids

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\; x^2+y^2-z^2=1,\; -1\le z\le 1\}$$

11. (a) Definieren Sie die Lie-Ableitung.

    (b) Berechnen Sie die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_V\omega$ für die Form $\omega = x\,dy$ und das Vektorfeld

    $$V(x,y)=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

    auf $\mathbb{R}^2$.

12. Integrieren Sie die 2-Form $\omega = (z^2 - xy)\,dx\wedge dy$ über die Nordhalbkugel

$$S^2_+ = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\; x^2+y^2+z^2=1,\; z\ge 0\}$$

mit einer Orientierung Ihrer Wahl.

13. (a) Formulieren Sie eine Version des Poincaré-Lemmas.

    (b) Gegeben sind die Homotopie

    $$\Phi:\quad [0,1]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad (t,x,y,z)\mapsto \Phi_t(x,y,z)=\begin{pmatrix} x \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$$

    und die 2-Form $\omega = xz\,dx\wedge dy + xy\,dy\wedge dz$.

    Wenden Sie das Lemma von Poincaré mit dem Ziel an, eine 1-Form $\sigma\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3)$ mit

    $$d\sigma = \Phi_1^*\omega - \Phi_0^*\omega$$

    zu finden.

14. Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(x) = x\,1_{[0,1]}(x)$ und $g = f * f$ die Faltung von f mit sich selbst. Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\hat{g}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} g(x)\,dx$$

von g.

15. Zeigen Sie:

    Es gibt keinen glatten Diffeomorphismus

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3 \to \mathbb{R}^3$$

16. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U = \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für den Diffeomorphismus

$$g: \quad U \to U, \quad g(x) = -x,$$

    dass g^*: $H^{2n-1}(U) \to H^{2n-1}(U)$ die Identität ist.

17. (a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Gauß.

    (b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - z^2 \\ xz \\ -2xz \end{pmatrix}$$

    von innen nach außen durch das Ellipsoid $E = \{v \in \mathbb{R}^3 | \ v^t A v + bv = 1\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = (1, 2, 3).$$

18. Gegeben seien $\omega = z^2\, dx - xy\, dy + dz$ und $\sigma = x\, dy - y\, dx$ in $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3)$. Berechnen Sie $\int_\phi \omega \wedge \sigma$ mit dem durch

$$\phi: \quad \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 < s < t < 1\} \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(s, t) = (s^2, t, t^2)$$

    parametrisierten "gekrümmten Dreieck".

19. (a) Formulieren Sie den Satz von Lebesgue zur Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung.

    (b) Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^4}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-tx^4}\, dx$$

    für alle $t > 0$.

20. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp(-x^t A x + b^t x)\, \lambda_3(dx),$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

21. (a) Formulieren Sie das Lemma von Fatou.

    (b) Formulieren Sie eine Version des Satzes von der monotonen Konvergenz.

    (c) Entscheiden Sie (natürlich mit Beweis), ob

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[-1,1]^2} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx \wedge dy$$

    endlich oder unendlich ist.

22. Berechnen Sie das zweidimensionale Lebesguemaß der Fläche

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ -1 \leq z \leq 1,\ 1 - z^2 = \sqrt{x^2+y^2}\}$$

23. (a) Formulieren Sie eine Version der Gleichung von Plancherel.

    (b) Die Funktion

$$f: \quad [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \quad f(x) = x^2,$$

    werde 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Wenden Sie die Gleichung von Plancherel auf diese Funktion an und zeigen Sie damit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

24. Sei

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \tfrac{1}{2} < x^2 + y^2 - z^2 < 2\}$$

Zeigen Sie, dass $H^1(U)$ nicht der Nullraum ist.