Präsenzaufgaben zu Blatt 15

T15.1 Überlegen Sie sich am Beispiel $\Omega = \{0\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu = \infty \cdot \delta_0$, $f = 1_\Omega$, dass die Approximierbarkeitsbedingung durch eine Folge $E_m \uparrow \{f \neq 0\}$ in Voraussetzung 1. des Lemmas 2.210 nicht überflüssig ist.

T15.2 Für $n \in \mathbb{N}$, eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$f(x) = f_{A,b}(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}x^t A x + b^t x\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei Elemente von $\mathbb{C}^n$ als Spaltenvektoren aufgefaßt werden. Weiter sei (mit etwas anderer Vorzeichen- und Skalierungskonvention als früher)

$$\mathcal{F}f(k) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik^t x} f(x) \lambda_n(dx), \quad k \in \mathbb{R}^n$$

die Fouriertransformierte von f . Zeigen Sie:

(a) Für $k \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathcal{F}f(k) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}(k + ib)^t A^{-1}(k + ib)\right)$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie das Ergebnis von Übungsaufgabe 9.4.)

(b) Folgern Sie, ohne die Unitarität der Fouriertransformation als bekannt vorauszusetzen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_{A,b}} f_{A',b'} d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}f_{A,b}} \mathcal{F}f_{A',b'} d\lambda_n,$$

wobei auch $b' \in \mathbb{C}^n$ sei und $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine weitere positiv definite Matrix bezeichnet.

T15.3 Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ für $x \neq 0$, $f(0)$ beliebig. Entscheiden Sie für jede der drei Funktionen $f1_B$, $f1_{B^c}$ und f , unter welchen Voraussetzungen an α , n und p sie in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ liegt.

T15.4 Es sei $1 \leq p < \infty$ und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= |x|^{-\frac{1}{2p}}(1_{]0,1]}(x) - 1_{[-1,0[}(x)) \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= \frac{1}{\sqrt{|x|}} 1_{[-1,1] \setminus \{0\}}(x) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (a) $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, also $f * g \in L^p(\mathbb{R})$
- (b) $f * g$ ist nur λ_1 -fast überall, jedoch nicht überall definiert. (Wo nicht?)
- (c) Berechnen Sie

$$c := \lim_{z \downarrow 0} z^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} + 1} f * g(z)$$

Drücken Sie c mit Hilfe von Werten der Betafunktion aus.