Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 14
24.01.2014

Übungen zur Analysis 3
Lösungen

14.1 Beweisen Sie die Formel

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{-x^{-1}} = p_k(x^{-1}) e^{-x^{-1}}, \quad x > 0, \tag{1}$$

für geeignete Polynome p_k vom Grad $2k$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

Lösung:

Beweis per Induktion nach k:

$\underline{k = 1:}$

$$\frac{d}{dx^1} e^{-x^{-1}} = \frac{1}{x^2} e^{-x^{-1}} = \left(x^{-1}\right)^2 e^{-x^{-1}}.$$

$\underline{k \Rightarrow k + 1:}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx^{k+1}} e^{-x^{-1}} &= \frac{d}{dx} \frac{d}{dx^k} (e^{-x^{-1}}) \\
&= \frac{d}{dx} \left(p_k(x^{-1}) e^{-x^{-1}} \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left((p_k(x^{-1})\right) e^{-x^{-1}} + p_k(x^{-1}) \left(x^{-1}\right) e^{-x^{-1}} \\
&= \underbrace{\left(p_k(x^{-1}) \left(x^{-1}\right) + \frac{d}{dx} \left((p_k(x^{-1})\right) \right)}_{=:p_{k+1}(x^{-1})} e^{-x^{-1}}.
\end{aligned}$$

14.2 Lösung der Poissongleichung. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch folgende Faltung mit dem Newtonpotential definiert:

$$h(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y)}{\|y\|_2} \lambda_3(dy)$$

Zeigen Sie, dass auch h glatt ist und die "Poissongleichung"

$$\Delta h = f$$

erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass Ableitungen nach Komponenten von x und das Integral hier vertauscht werden können.

Lösung

Es gilt

$$-4\pi\frac{h(x+he_i)-h(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{t\|y\|_2}\,\lambda_3(dy)$$

für Einheitsvektoren $e_i \in R^3$ und $t \neq 0$. Nach Definition der partiellen Ableitung konvergiert

$$\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{t\|y\|_2} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$$

gleichmässig. Entsprechend erhalten wir gleichmäßige Konvergenz für die zweiten Ableitungen und entsprechend mit dominierter Konvergenz

$$\Delta_x h(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x f(x-y)}{\|y\|_2}\,\lambda_3(dy).$$

Wegen $\Delta_x f(x-y) = (-1)^2\Delta_y f(x-y) = \Delta f(x-y)$ erhalten wir mit $g_x(y) = f(x-y)$

$$\Delta_x h(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_y g_x(y)}{\|y\|_2}\,\lambda_3(dy).$$

Die Funktion g_x erbt die zweifache stetige Differenzierbarkeit, sowie den kompakten Träger von f, $\forall x \in \mathbb{R}$. Jetzt können wir 2.160 verwenden und erhalten die Behauptung

$$\Delta_x h(x) = g_x(0) = f(x).$$

14.3 Greensfunktion zu Δ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2^{d-2}}\,\lambda_n(dx) = -n\lambda_n(B_n)f(0)$$

wobei B_n die n-dimensionale Einheitskugel bezeichnet.
Hinweis: Der Fall $n = 3$ ist in Beispiel 2.160 behandelt. Lassen Sie sich durch diesen Spezialfall inspirieren.

Lösung:

Wir argumentieren komplett analog zu Beispiel 2.160: Man berechnet leicht, dass $\triangle\frac{1}{\|x\|^{n-2}} = 0$ für alle $x \neq 0$. Mit $M_{R,r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r \leq \|x\| \leq R\}$, wobei $\mathrm{supp}(f) \subset B_R(0)$, und dem Satz von Green erhalten wird

$$\begin{aligned}\int_{M_{R,r}} \frac{\triangle f(x)}{\|x\|^{n-2}} d\lambda_n &= -\int_{M_{R,r}} f\triangle g - \triangle f g d\lambda_n \\ &= \int_{rS^{n-1}} f *_{\lambda_n} \nabla g - g *_{\lambda_n} \nabla f \\ &= \int_{S^{n-1}} s_r^*(f *_{\lambda_n} \nabla g - g *_{\lambda_n} \nabla f),\end{aligned}$$

wobei s_r die Skalierungsabbildung $x \mapsto rx$ ist. Wiederum wie in Beispiel 2.160 bemerken wir, dass $s_r^* f(x) = f(rx)$ ist. Ferner

$$*_{\lambda_n}\nabla f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} D_i f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

uns somit

$$\begin{aligned}
s_r^* *_{\lambda_n} \nabla f(x) &= s_r^* \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} D_i f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= r^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} D_i f(rx) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= r^{n-1} *_{\lambda_n} \nabla f(rx).
\end{aligned}$$

Analog gilt $s_r^* *_{\lambda_n} \nabla g(x) = r^{n-1} *_{\lambda_n} \nabla g(rx)$ und mit $\nabla g(x) = -(n-2)\frac{1}{\|x\|^{n-1}} N(x)$ erhalten wir

$$s_r^* *_{\lambda_n} \nabla g(x) = -(n-2) r^{n-1} *_{\lambda_n} \frac{N(x)}{\|rx\|^{n-1}}.$$

Wir setzen die obige Rechnung fort und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{M_{R,r}} \frac{\triangle f(x)}{\|x\|^{n-2}} d\lambda_n &= \int_{S^{n-1}} s_r^*(f *_{\lambda_n} \nabla g - g *_{\lambda_n} \nabla f) \\
&= -(n-2) \int_{S^{n-1}} f(rx) r^{n-1} *_{\lambda_n} \frac{N(x)}{\|rx\|^{n-1}} - \int_{S^{n-1}} r^{n-1} \frac{1}{\|rx\|^{n-2}} *_{\lambda_n} \nabla f(rx) \\
&= -(n-2) \int_{S^{n-1}} f(rx) *_{\lambda_n} \frac{N(x)}{\|x\|^{n-1}} - \int_{S^{n-1}} r \frac{1}{\|x\|^{n-2}} *_{\lambda_n} \nabla f(rx) \\
&\xrightarrow{r \downarrow 0} -(n-2) \int_{S^{n-1}} f(0) *_{\lambda_n} N(x) \\
&= -(n-2) f(0) \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}) \\
&= -(n-2) f(0) n \lambda_n(B_n).
\end{aligned}$$

Da $\frac{\triangle f(x)}{\|x\|^{n-2}}$ λ_n-integrierbar ist, folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\triangle f(x)}{\|x\|^{n-2}} \lambda_n(dx) = \lim_{r \downarrow 0} \int_{M_{R,r}} \frac{\triangle f(x)}{\|x\|^{n-2}} \lambda_n(dx) = -(n-2) f(0) n \lambda_n(B_n).$$

14.4 Lie-Ableitung und Hamiltonische Vektorfelder. Für ein Vektorfeld $v \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine p-Form $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$, $p \geq 1$, definieren wir die *Lie-Ableitung* von ω nach v durch

$$\mathcal{L}_v \omega := i_v d\omega + d i_v \omega.$$

Wir setzen auch noch $\mathcal{L}_v \omega := i_v d\omega$ für $\omega \in \mathcal{D}^0(U)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Lie-Ableitung die "gewöhnliche" (nicht antikommutative) Produktregel

$$\mathcal{L}_v(\omega \wedge \chi) = (\mathcal{L}_v \omega) \wedge \chi + \omega \wedge (\mathcal{L}_v \chi)$$

für $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$, $\chi \in \mathcal{D}^q(U)$ mit $p, q \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v \omega$ der Standardflächenform $\omega = dx \wedge dy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nach dem Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x, y)$.

(c) Nun seien $n = 2m$ gerade, $H : U \to \mathbb{R}$ glatt,

$$\omega = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge dx_{j+m}$$

und

$$v = (D_{m+1}H, \ldots, D_{2m}H, -D_1H, \ldots, -D_mH),$$

also $v_j = D_{m+j}H$ und $v_{m+j} = -D_jH$ für $j = 1, \ldots, m$. Zeigen Sie:

(i) $i_v\omega = dH$,

(ii) $\mathcal{L}_v\omega = 0$,

(iii) $\omega^{\wedge m} := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{m \text{ Faktoren}}$ ist ein konstantes Vielfaches der Standardvolumenform $\lambda_n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$,

(iv) $\mathcal{L}_v\lambda_n = 0$.

Lösung

(a) Es ist mit 2.85 und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v(\omega \wedge \eta) &= i_v d(\omega \wedge \eta) + di_v(\omega \wedge \eta)\\
&= i_v(d(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d(\eta)) + d(i_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_v(\eta))\\
&= i_v d(\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+1} d(\omega) \wedge i_v\eta + (-1)^p i_v\omega \wedge d(\eta) + \omega \wedge i_v d(\eta)\\
&\quad + di_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^{p-1} i_v\omega \wedge d\eta + (-1)^p d\omega \wedge i_v(\eta) + \omega \wedge di_v(\eta)\\
&= i_v d(\omega) \wedge \eta + di_v(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge i_v d(\eta) + \omega \wedge di_v(\eta)\\
&= \mathcal{L}_v(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_v(\eta)\end{aligned}$$

Die Formel in 2.85 ergibt sich wie folgt: Sei (e_i) eine Basis von V. Wegen Linearität von i genügt es die Aussage auf der Basis zu überprüfen. Es ist

$$\begin{aligned}&i_{e_i}(\underbrace{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}}_{=:\omega} \wedge \underbrace{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}}_{=:\eta})(\cdot)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq i_l, j_k,\ \forall 1 \leq l \leq p,\ \forall 1 \leq k \leq q\\ (-1)^{m-1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \cancel{e_m} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}(\cdot) & \text{falls } m \in \{i_1, \ldots, 1_p\}\\ (-1)^{p+m-1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \cancel{e_m} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}(\cdot) & \text{falls } m \in \{j_1, \ldots, j_q\}\end{cases}\end{aligned}$$

Ebenso bestimmt man für die rechte Seite der Leibnizregel die Werte in den unterschiedlichen Fällen um die Behauptung zu zeigen.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v\omega &= \mathcal{L}(dx) \wedge dy + dx \wedge \mathcal{L}(dy) = di_v(dx) + di_v(dy)\\
&= d(-ydx + xdy) = -dy \wedge dx + dx \wedge dy = 2dx \wedge dy\end{aligned}$$

(c) Zu Teil (i): Man berechne

$$\omega(v, w_i) = x_j(v)x_{j+m}(w) + (-1)^{m-1+m-2} x_j(w)x_{j+m}(v) = (v_j dx_{j+m} - v_{j+m} dx_j)(w)$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$i_v(\omega) = \sum_{j=1}^{m} (D_{j+m}H dx_{j+m} + D_jH dx_j) = dH.$$

Zu Teil (ii): Nach Teil (i) gilt $\mathcal{L}_v(\omega) = i_v d\omega = 0$.

Zu Teil (iii): Durch ausmultiplizieren sehen wir, dass bei Wahl eines Summanden in der ersten Summe, wir in der zweiten alle bis auf denselben Summand (d. h. $(n-1)$ verschiedene) Summanden auswählen können ohne die 0-Form zu erhalten. Induktiv erhalten wir $\omega^{\wedge m} = n! dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Zu Teil (iv): Es gilt nach Teil (a) und (ii) $\mathcal{L}(\lambda_n) = n!\mathcal{L}\omega^{\wedge m} = n!((\mathcal{L}\omega \wedge \omega \wedge \ldots \omega) + \ldots + (\omega \wedge \omega \wedge \ldots \mathcal{L}\omega)) = 0$.