

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, die bevorzugt korrigiert werden sollen.

14.1 Beweisen Sie die Formel

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{-x^{-1}} = p_k(x^{-1}) e^{-x^{-1}}, \quad x > 0, \quad (1)$$

für geeignete Polynome p_k vom Grad $2k$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

14.2 Lösung der Poissongleichung. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger und $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch folgende Faltung mit dem Newtonpotential definiert:

$$h(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y)}{\|y\|_2} \lambda_3(dx)$$

Zeigen Sie, dass auch h glatt ist und die “Poissongleichung”

$$\Delta h = f$$

erfüllt.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass Ableitungen nach Komponenten von x und das Integral hier vertauscht werden können.

14.3 Greensfunktion zu Δ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2^{n-2}} \lambda_n(dx) = -n(n-2) \lambda_n(B_n) f(0)$$

wobei B_n die n -dimensionale Einheitskugel bezeichnet.

Hinweis: Der Fall $n = 3$ ist in Beispiel 2.160 behandelt. Lassen Sie sich durch diesen Spezialfall inspirieren.

14.4 Lie-Ableitung und Hamiltonische Vektorfelder. Für ein Vektorfeld $v \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine p -Form $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$, $p \geq 1$, definieren wir die *Lie-Ableitung* von ω nach v durch

$$\mathcal{L}_v \omega := i_v d\omega + di_v \omega.$$

Wir setzen auch noch $\mathcal{L}_v \omega := i_v d\omega$ für $\omega \in \mathcal{D}^0(U)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Lie-Ableitung die “gewöhnliche” (nicht antikommutative) Produktregel

$$\mathcal{L}_v(\omega \wedge \chi) = (\mathcal{L}_v \omega) \wedge \chi + \omega \wedge (\mathcal{L}_v \chi)$$

für $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$, $\chi \in \mathcal{D}^q(U)$ mit $p, q \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

- (b) Berechnen Sie die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v\omega$ der Standardflächenform $\omega = dx \wedge dy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nach dem Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x, y)$.
- (c) Nun seien $n = 2m$ gerade, $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt,

$$\omega = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge dx_{j+m}$$

und

$$v = (D_{m+1}H, \dots, D_{2m}H, -D_1H, \dots, -D_mH),$$

also $v_j = D_{m+j}H$ und $v_{m+j} = -D_jH$ für $j = 1, \dots, m$. Zeigen Sie:

- (i) $i_v\omega = dH$,
- (ii) $\mathcal{L}_v\omega = 0$,
- (iii) $\omega^{\wedge m} := \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{m \text{ Faktoren}}$ ist ein konstantes Vielfaches der Standardvolumenform $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$,
- (iv) $\mathcal{L}_v\lambda_n = 0$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 03.02.2014, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 14

T14.1 Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Behauptung des Satzes von Stokes falsch werden kann, wenn man auf die Voraussetzung verzichtet, dass der Integrand ω kompakten Träger haben soll.

T14.2 Gegeben sei die 2-Form $\omega = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$. Berechnen Sie das Integral $\int_{S^2} d\omega$ über die Sphäre (so orientiert, dass ω darauf positiv wird) auf zwei verschiedene Weisen:

- (a) direkt als zweidimensionales Integral;
- (b) mit dem Satz von Stokes.

T14.3 Greensfunktion zu Δ in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log \|x\|_2 \, \Delta f(x) \, \lambda_2(dx) = 2\pi f(0)$$

Hinweis: Imitieren Sie die Idee von Beispiel 2.160.

T14.4 Cauchy-Integralformel für reell differenzierbare Funktionen. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein kompaktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Es sei $x : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Realteilbildung, $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Imaginärteilbildung, $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$. Weiter sei a ein Punkt im Inneren $U^\circ = U \setminus \partial U$ von U . Zeigen Sie:

- (a) $d\bar{z} \wedge dz = 2i \, dx \wedge dy = 2i \, \lambda_2$
- (b)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - a} = 0 \quad \text{auf } U \setminus \{a\}$$

- (c) Ist $r > 0$ so klein, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U_r(a)}$ um a mit Radius r ganz in U° enthalten ist, so gilt

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - a} \, dz = \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(z)}{z - a} \, dz + \int_{U \setminus U_r(a)} \frac{1}{z - a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \, d\bar{z} \wedge dz \quad (2)$$

- (d) Folgern Sie im Limes $r \downarrow 0$ die folgende verallgemeinerte Cauchy-Integralformel:

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - a} \, dz = 2\pi i f(a) + \int_{U \setminus \{a\}} \frac{1}{z - a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \, d\bar{z} \wedge dz$$

Insbesondere gilt die Cauchy-Integralformel

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - a} \, dz = 2\pi i f(a)$$

für holomorphe Funktionen f .

Hinweis: Parametrisieren Sie die Kreislinie $\partial U_r(a)$ durch $z(t) := a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, und wenden Sie den Satz von der dominierten Konvergenz an, um den Limes $r \downarrow 0$ in den Integralen in (??) auszuführen. Achten Sie dabei sorgfältig auf die Existenz integrierbarer Majoranten.

Aufgaben mit einem „T“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „ε“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „*“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.