Übungen zur Analysis 3
Lösung

13.1ε Fläche eines Hyperbelsektors. Berechnen Sie für $a > 0$ den Flächeninhalt $\lambda_2(A)$ des Hyperbelsektors

$$A = \{(r \cosh s, r \sinh s) |\ 0 < r < 1,\ 0 < s < a\}$$

und vergleichen Sie mit der (damals anschaulich-heuristischen) Rechnung aus der Analysis 1.

Lösung

Setze

$$\begin{aligned}\varphi\colon (0,1) \times (0,a) &\longrightarrow A \\ (r,t) &\longmapsto (r\cosh(s), r\sinh(s)).\end{aligned}$$

Dann ist φ ein Diffeomorphismus, dessen Jacobideterminante den Wert $-r$ hat, im Betrag also r ist. Aus dem Transformationssatz folgt

$$\begin{aligned}\lambda_2(A) &= \int_A d\lambda_2 = \int_{\varphi((0,1)\times(0,a))} d\lambda_2 \\ &= \int_{(0,1)\times(0,a)} |\det D\varphi(r,s)| drds \\ &= a\int_0^a rdr \\ &= \frac{1}{2}a.\end{aligned}$$

13.2 Integral über Blätterungen durch Hyperflächen.

(a) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $df_x \neq 0$ für alle $x \in U$, so dass die Niveaugebilde $M_t := f^{-1}(\{t\})$, $t \in \mathbb{R}$ Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$ (oder leer) sind. Zeigen Sie für alle $g \in \overline{M}_+(U, \mathcal{B}(U))$:

$$\int_U g\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \int_{M_t} \frac{g(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}\, \omega^{M_t}(dx)\, dt.$$

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass man im Spezialfall $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = \|x\|_2$ hieraus wieder die Formel (61) aus Übung 2.56 erhält.

Lösung Since $df_x \neq 0$, $\forall x \in f^{-1}(\{t\})\ \exists U_x \subset U$ Umgebung s. d. $U_x \simeq -]\varepsilon, \varepsilon[\times V_x, \varepsilon > 0, V_x \subset M_t$ mittels des Diffeomorphismu $f \times \tilde{f}$.[1] Entsprechend gilt $T_xU \simeq T_xM_t \times \langle \nabla f(x) \rangle$ und die Zerlegung ist orthogonal bzgl. Standardskalarprodukt. Wir ergänzen $e_1(x) := \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ mit $e_i(x)$, $2 \leq i \leq n$ zu einer ONB von $T_x(U)$ s. d. die Transformation orientierungserhaltend ist.[2] $D\varphi$ hat in unserer Basis $e_i(x)$ die Form $(f \times \tilde{f})$ mit einer Ma-

[1] Der Satz über implizite Funktionen liefert diese Blätterung.
[2] Insbesondere ändert sich λ_n durch diese Rotation nicht.

trix $\tilde{f} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und (o. B. d. A)[3] $\det(D\varphi) = 1$. Es folgt $\det(D\tilde{f}) = \|\nabla f\|^{-1}$, da $\det f = \|\nabla f\|$. Wir betrachten hier f als Abbildung von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittels der lokalen Identifikation von U_x mit $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V_x$.[4] Zur Vorstellung: $\gamma : -]\varepsilon, \varepsilon[\to U_x$ mit $\gamma(0) = x$ ist ein Weg in U mit $f(\gamma(t)) = t$ und $D(f \circ \gamma)(t) = 1$. Die Länge dieses Wegstückes ist gegeben durch $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|\gamma'(t)\|\ dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|(\nabla f)(\gamma(t))\|^{-1}\ dt$.
Wir erhalten $(\tilde{f})^*\sigma_x = \|\nabla f(x)\|^{-1}\sigma_x$ und somit

$$\int_U g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{M_t} \frac{g(x)}{\|\nabla f(x)\|}\ \omega^{M_t}(dx)\ dt.$$

Im Fall $f(x) = \|x\|$ ist die Faser über r gerade die Sphäre S_r^{n-1} vom Radius r für $r > 0$ und die leere Menge sonst. Mit $\|\nabla f(x)\| = 1$ und $\frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\Omega_{n-1}(dx)r^{n-1}$ das eindeutige Volumenmaß auf S_r^{n-1} erhalten wir die Formel aus 2.56.

13.3 Es sei ω eine glatte p-Form auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in U$ und $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie

$$d\omega_x(v_0, \dots, v_p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tilde{d}\omega_x(v_k)(v_0, \dots, \cancel{v_k}, \dots, v_p), \tag{1}$$

wobei d die äußere Ableitung und $\tilde{d}$ die Ableitung aus der Analysis 2 bezeichnet.
Hinweis: Laplace-Entwicklung von Determinanten

Lösung

13.4 Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ glatt,

$$h :]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$
$$h(\phi, \theta, r) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$$

die Umrechnung in Kugelkoordinaten, und $F = f \circ h$.

(a) Zeigen Sie:

$$(\Delta f) \circ h = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}$$

Der Kürze halber sind hier die Argumente (ϕ, θ, r) weggelassen.

(b) Wenden Sie diese Formel für $f(x) = x_3 e^{-\|x\|_2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ an. Berechnen Sie zur Kontrolle auch $(\Delta f) \circ h$ direkt und versuchen Sie, übereinstimmende Ergebnisse zu erhalten.

Lösung

[3] Ggf. skaliere man die Parametrisierung $\tilde{f}$.
[4] Df ist auch in dieser Basis eigentlich die Abbildung $(e_1, \dots, e_n) \mapsto \nabla f(x)e_1$, d. h. $Df(x) = (\nabla f(x), 0, \dots, 0)$.

(a) Man verwende 2.139 mit $g = h^*\sigma = h^*(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) = (dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + \ r^2\cos^2(\theta) d\phi \otimes d\phi)$ und $\sqrt{\det(g)} = r^2\cos(\theta)$. Einsetzen in die Formel aus 2.139 liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned}(\Delta f)\circ h(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\det g(r,\theta,\phi)}} \sum_{y\in\{r,\theta,\phi\}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\det g(r,\theta,\phi)}\, g^{-1}_{yy}(r,\theta,\phi) \frac{\partial}{\partial y}(f\circ h)(r,\theta,\phi)\right)\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial (f\circ h)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial (f\circ h)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 (f\circ h)}{\partial \phi^2},\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile wieder die Argumente weggelassen haben.

(b) $f(h(r,\theta,\phi)) = r\sin(\theta)e^{-r}$ und

$$\begin{aligned}(\Delta f)\circ h &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin(\theta)e^{-r}(1-r)) + \frac{1}{r^2\cos(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos^2(\theta) r e^{-r})\\ &= \frac{\sin(\theta)e^{-r}(r^2-4r+2)}{r} - \frac{2\sin(\theta)e^{-r}}{r} = (r-4)\sin(\theta)e^{-r}.\end{aligned}$$

Wir überprüfen die Rechnung

$$\begin{aligned}(\Delta f) &= \frac{(x_1^2\|x\| - x_2^2 - x_3^2)x_3 e^{-\|x\|}}{\|x\|^3} + \frac{(x_2^2\|x\| - x_1^2 - x_3^2)x_3 e^{-\|x\|}}{\|x\|^3} + \dots\\ &\quad \dots + \frac{(x_3^2\|x\| - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2)x_3 e^{-\|x\|}}{\|x\|^3}\\ &= \left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)\|x\| - (x_2^2+x_3^2+x_1^2+x_3^2+3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2)\right)\frac{x_3 e^{-\|x\|}}{\|x\|^3}\\ &= \left(\|x\|^3 - 4\|x\|^2\right)\frac{x_3 e^{-\|x\|}}{\|x\|^3}\end{aligned}$$

und transformieren das Ergebnis in Kugelkoordinaten

$$\left(r^3 - 4r^2\right)\frac{r\sin(\theta)e^{-r}}{r^3} = (r-4)\sin(\theta)e^{-r}.$$