Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 12
09.01.2014

Übungen zur Analysis 3
Lösung

12.1ε Rückzug vertauscht mit Dachprodukt. Es sei $f : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ω eine p-Form und χ eine q-Form auf V, $p, q \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$$f^*(\omega \wedge \chi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\chi).$$

Lösung

Seien $v_1, \ldots, v_{p+q} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \chi) &= (\omega \wedge \chi)(Df(v_1), \ldots, Df(v_n)) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(Df(v_{\sigma(1)}), \ldots, Df(v_{\sigma(p)})) \chi(Df(v_{\sigma(p+1)}), \ldots, Df(v_{\sigma(p+q)}) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sign}(\sigma) f^*\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) f^*\chi(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &= (f^*\omega) \wedge (f^*\chi)(v_1, \ldots, v_{p+q}). \end{aligned}$$

12.2 **Volumen eines Kugelschalensektors.** Berechnen Sie für $0 < a < b$ und $c > 0$ das Volumen $\lambda_3(S)$ des Kugelschalensektors

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z > 0,\ a^2 < x^2 + y^2 + z^2 < b^2,\ z^2 < c^2(x^2 + y^2)\}$$

Versuchen Sie sich S anschaulich vorzustellen.
Hinweis: Transformieren Sie in Kugelkoordinaten.

Lösung

Sei $x = r\sin(\theta)\cos(\phi)$, $y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$, $z = r\cos(\theta)$. Dann ist $a < r < b$ und $\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} < c \Rightarrow \operatorname{arccot}(0) > \theta > \operatorname{arccot}(c)$[1] und

$$\lambda_3(S) = 2\pi \int_{\operatorname{arccot}(c)}^{\pi/2} \int_a^b r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta = \frac{2\pi(b^3 - a^3)}{3} [\cos(\theta)]_{\pi/2}^{\operatorname{arccot}(c)} = \frac{2\pi(b^3 - a^3)}{3} \cdot \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}.$$[2]

Man vedeutliche sich S durch eine Zeichnung. Die erste Einschränkung beschränkt uns auf die obere Halbebene, die zweite ergibt eine Kugel vom Radius b aus der wir eine Kugel vom Radius a herausnehmen, die dritte Bedingung schränkt uns auf das Komplement eines (Doppel-)Kegels um die z-Ache mit Öffnungswinkel $\operatorname{arccot}(c)$ ein.

[1] arccot monoton fallend.
[2] $\cos(\operatorname{arccot}(c)) = c/\sqrt{1 + c^2}$ aus $\cos^2(\theta) = \cos^2(\theta)/(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = \cot^2(\theta)/(1 + cot^2(\theta))$.

12.3 Stereographische Projektion und hyperbolische Ebene.

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

die (inverse) stereographische Projektion. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in S^2$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit der Sphäre S^2 ist.

Berechnen Sie f^*g für die euklidische Metrik

$$g = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 + dy_3 \otimes dy_3.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$f^*g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ gilt. Man sagt hierzu: f ist *konform* oder auch *winkeltreu.*

(b) **Hyperbolische Variante:** Gegeben sei die indefinite symmetrische Bilinearform

$$h = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 - dy_3 \otimes dy_3$$

und das zweischalige Hyperboloid

$$H = \{y \in \mathbb{R}^3 |\ h(y, y) = -1\} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 |\ y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1\}$$

sowie die (inverse) hyperbolische stereographische Projektion $f : D \to H$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

wobei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ die Einheitskreisscheibe bezeichnet. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in H$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit dem Hyperboloid H ist.

Berechnen Sie $g := f^*h$ und überzeugen Sie sich davon, dass

$$g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : D \to \mathbb{R}^+$ gilt. Insbesondere ist g positiv definit, also eine Riemannsche Metrik auf der Einheitskreisscheibe.

g wird die *Poincaré-Metrik* auf D genannt. Die Einheitskreisscheibe D, versehen mit dieser Riemannschen Metrik, wird *Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene* genannt.

Lösung

(b) Wir überzeugen uns zunächst, dass f tatsächlich die gewünschte Abbildung ist. Dazu sei $(x_1, x_2) \in D^2$ gegeben. Die Gerade durch $(0, 0, -1)$ und $(x_1, x_2, 0)$ ist

$$g \colon t \mapsto (1 - t)(0, 0, -1) + t(x_1, x_2, 0) = (tx_1, tx_2, t - 1).$$

Die Schnittpunkte von g mit H sind geben durch die Lösungen von

$$t^2x_1^2 + t^2x_2^2 - (t-1)^2 = -1.$$

Die nichttriviale Lösung ist $t = -\frac{2}{x_1^2+x_2^2-1} == \frac{2}{1-x_1^2-x_2^2}$ und Einsetzen in g liefert

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{2}{x_1^2+x_2^2-1}\right) &= \left(\frac{2x_1}{1-x_1^2-x_2^2}, \frac{2x_2}{1-x_1^2-x_2^2}, \frac{2-(1-x_1^2-x_2^2)}{1-x_1^2-x_2^2}\right) \\ &= \left(\frac{2x_1}{1-x_1^2-x_2^2}, \frac{2x_2}{1-x_1^2-x_2^2}, \frac{1+x_1^2+x_2^2)}{1-x_1^2-x_2^2}\right) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Rückzug von h unter f:

$$\begin{aligned} f^*g &= f^*(dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 - dy_3 \otimes dy_3) \\ &= (f^*dy_1) \otimes (f^*dy_1) + (f^*dy_2) \otimes (f^*dy_2) - (f^*dy_3) \otimes (f^*dy_3) \\ &= d(y_1 \circ f) \otimes d(y_1 \circ f) + d(y_2 \circ f) \otimes d(y_2 \circ f) - d(y_3 \circ f) \otimes d(y_3 \circ f). \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst $d(y_1 \circ f)$:

$$\begin{aligned} d(y_1 \circ f) &= d\left(\frac{2x_1}{1-x_1^2-x_2^2}\right) \\ &= 2\frac{1(1-x_1^2-x_2^2) - x_1(-2x_1)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_1 + 2\frac{0 - x_1(-2x_2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_2 \\ &= 2\frac{1+x_1^2-x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_1 + \frac{4x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_2. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(y_1 \circ f) \otimes d(y_1 \circ f) &= \left(2\frac{1+x_1^2-x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_1 + \frac{4x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_2\right) \otimes \\ &\quad \otimes \left(2\frac{1+x_1^2-x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_1 + \frac{4x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_2\right) \\ &= 4\frac{(1+x_1^2-x_2^2)^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_1 \otimes dx_1 + 8x_1x_2\frac{1+x_1^2-x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) + \\ &\quad + \frac{16x_1^2x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_2 \otimes dx_2. \end{aligned}$$

Die Rechnung für $d(y_2 \circ f)$ geht analog.

$$\begin{aligned} d(y_2 \circ f) &= \frac{4x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_1 + 2\frac{1-x_1^2+x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_2 \\ d(y_2 \circ f) \otimes d(y_2 \circ f) &= 8x_1x_2\frac{1-x_1^2+x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) \\ &\quad + \frac{16x_1^2x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_1 \otimes dx_1 + 4\frac{(1-x_1^2+x_2^2)^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_2 \otimes dx_2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} d(y_1 \circ f) \otimes d(y_1 \circ f) + d(y_2 \circ f) \otimes d(y_2 \circ f) &= \frac{4(1+x_1^2-x_2^2)^2 + 16x_1^2x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_1 \otimes dx_1 + \\ &\quad + \frac{16x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) \\ &\quad + \frac{4(1-x_1^2+x_2^2)^2 + 16x_1^2x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_2 \otimes dx_2. \end{aligned}$$

Zuletzt:

$$\begin{aligned}
d(y_3\circ f) &= d\left(\frac{1+x_1^2+x_2^2}{1-x_1^2-x_2^2}\right)\\
&= \frac{2x_1(1-x_1^2-x_2^2)-(1+x_1^2+x_2^2)(-2x_1)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_1 + \frac{2x_2(1-x_1^2-x_2^2)-(1+x_1^2+x_2^2)(-2x_2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_2\\
&= \frac{4x_1}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_1 + \frac{4x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}dx_2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
d(y_3\circ f)\otimes d(y_3\circ f) = {}& \frac{16x_1^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_1\otimes dx_1 + \frac{16x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}(dx_1\otimes dx_2+dx_2\otimes dx_1)+\\
& \frac{16x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_2\otimes dx_2.
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f^*h = {}& \frac{4(1+x_1^2-x_2^2)^2+16x_1^2x_2^2-16x_1^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_1\otimes dx_1 + \frac{16x_1x_2-16x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}(dx_1\otimes dx_2+dx_2\otimes dx_1)\\
&+ \frac{4(1-x_1^2+x_2^2)^2+16x_1^2x_2^2-16x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_2\otimes dx_2\\
= {}& \frac{4(1+x_1^2-x_2^2)^2+16x_1^2x_2^2-16x_1^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_1\otimes dx_1 + \frac{4(1-x_1^2+x_2^2)^2+16x_1^2x_2^2-16x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^4}dx_2\otimes dx_2.
\end{aligned}$$

Dass die Koeffizienten vor $dx_1\otimes dx_1$ und vor $dx_2\otimes dx_2$ gleich sind, erfährt man beispielsweise, indem man ihre Differenz von WolframAlpha (www.wolframalpha.com) berechnen lässt. Folglich ist f^*h konform.

(a) Die Rechnungen sind komplett analog zu (b). Wir zeigen zunächst, dass f tatsächlich die behauptete Abbildung ist: Die Gerade vom Südpol $(0,0,-1)$ zu $(x_1,x_2,0)$ ist gegeben durch

$$g\colon t\mapsto (1-t)(0,0,-1)+t(x_1,x_2,0).$$

Die Schnittpunkte mit S^2 erhält man durch Lösen der Gleichung $|g(t)|=1$ oder äquivalent $|g(t)|^2=1$. Die ein Lösung ist offensichtlich $t=0$. Setzt man die zweite Lösung in g ein, erhält man genau

$$f(x_1,x_2)=\left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},\frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1},\frac{1-x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2+1}\right)$$

Wir berechnen nun den Rückzug von g unter f:

$$f^*h = d(y_1\circ f)\otimes d(y_1\circ f)+d(y_2\circ f)\otimes d(y_2\circ f)+d(y_3\circ f)\otimes d(y_3\circ f).$$

Wir berechnen zunächst $d(y_1\circ f)$:

$$\begin{aligned}
d(y_1\circ f) &= d\left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}\right)\\
&= \frac{-2x_1^2+2x_2^2+2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}dx_1+\frac{-4x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}dx_2.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
d(y_1\circ f)\otimes d(y_1\circ f) = {}& \frac{(-2x_1^2+2x_2^2+2)^2}{(x_1^2+x_2^2+1)^4}dx_1\otimes dx_1 + \frac{8x_1x_2(x_1^2-x_2^2-1)}{(x_1^2+x_2^2+1)^4}(dx_1\otimes dx_2+dx_2\otimes dx_1)+\\
&+\frac{16x_1^2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2+1)^4}dx_2\otimes dx_2.
\end{aligned}$$

Analog:

$$
\begin{aligned}
d(y_2 \circ f) &= d\left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right) \\
&= \frac{-4x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} dx_1 + \frac{2x_1^2 - 2x_2^2 + 2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} dx_2.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
d(y_2 \circ f) \otimes d(y_2 \circ f) = {} & \frac{16x_1^2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_1 \otimes dx_1 + \frac{8x_1x_2(-x_1^2 + x_2^2 - 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) + \\
& + \frac{(2x_1^2 - 2x_2^2 + 2)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_2 \otimes dx_2.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten somit

$$
\begin{aligned}
d(y_1 \circ f) \otimes d(y_1 \circ f) + d(y_2 \circ f) \otimes d(y_2 \circ f) = {} & \frac{(-2x_1^2 + 2x_2^2 + 2)^2 + 16x_1^2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_1 \otimes dx_1 + \\
& + \frac{-16x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) \\
& + \frac{(2x_1^2 - 2x_2^2 + 2)^2 + 16x_1^2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_2 \otimes dx_2.
\end{aligned}
$$

Zuletzt:

$$
\begin{aligned}
d(y_3 \circ f) &= d\left(\frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right) \\
&= \frac{-4x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} dx_1 + \frac{-4x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} dx_2
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
d(y_3 \circ f) \otimes d(y_3 \circ f) = {} & \frac{16x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_1 \otimes dx_1 + \frac{16x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) + \\
& \frac{16x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_2 \otimes dx_2.
\end{aligned}
$$

Zusammen erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
f^*g = {} & \frac{(-2x_1^2 + 2x_2^2 + 2)^2 + 16x_1^2x_2^2 + 16x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_1 \otimes dx_1 + \frac{-16x_1x_2 + 16x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) \\
& + \frac{(2x_1^2 - 2x_2^2 + 2)^2 + 16x_1^2x_2^2 + 16x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^4} dx_2 \otimes dx_2 \\
= {} & \frac{4}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} dx_1 \otimes dx_1 + \frac{4}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} dx_2 \otimes dx_2.
\end{aligned}
$$

Die Metrik ist also auch konform.

12.4 Zusammensetzen eines Maßes aus Stücken. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von messbaren Mengen $V_i \in \mathcal{A}$, die eine abzählbare Überdeckung $(V_i)_{i \in J}$ von M umfaßt: $J \subseteq I$ abzählbar, $\bigcup_{i \in J} V_j = M$. Für jedes $i \in I$ sei μ_i ein Maß auf $(V_i, \mathcal{A}_i)$, wobei $\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{A} | \ A \subseteq V_i\}$. Weiter gelte $\mu_i(A) = \mu_j(A)$ für alle $i, j \in I$ und alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq V_i \cap V_j$. Zeigen Sie, dass es genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ gibt, so dass $\mu(A) = \mu_i(A)$ für alle $i \in I$ und $A \in \mathcal{A}_i$ gilt.

Lösung

Da $\bigcup_{j\in J} V_j = M$ und $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = \bigcup_{j\in J} V_j \cap A,\ V_j \cap A \in \mathcal{A}_j$ finden wir insbesondere eine disjunkte Zerlegung von $A = \bigcup_{j\in J} U_j,\ U_j = A \cap \left(V_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} V_k \right) \in \mathcal{A}_j$. Sei $\mu(A) := \sum_{j\in J} \mu_j(U_j)$. Aus der Definition folgt sofort, dass μ ein Maß ist. Weiter erfüllt μ bereits $\mu(A) = \mu_i(A)$ für alle $i \in I$ und $A \in \mathcal{A}_i$, denn

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \sum_{j\in J} \mu_j \left(\underbrace{A \cap \left(V_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} V_k \right)}_{\in V_i \cap V_j} \right) \\
&= \sum_{j\in J} \mu_i \left(A \cap \left(V_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} V_k \right) \right) \\
&= \mu_i(A).
\end{aligned}$$

Schließlich folgt die Eindeutigkeit von μ aus σ-Additivität und der disjunkten Zerlegung.